



# MATHEMATISCHE MODELLE FÜR TIPPING POINTS

*Fellowbericht*

**Anna Marciniak-Czochra**

DOI: 10.11588/fmk.2021.0.78677

**MARSILIUS-  
KOLLEG**

2019/2020



# MATHEMATISCHE MODELLE FÜR TIPPING POINTS

Kippunkte (engl. *Tipping Points*) sind eine bedeutsame Eigenschaft vieler komplexer Systeme und kommen in unterschiedlichen Fachdisziplinen vor, wie in der Biologie, der Ökosystemforschung und den Wirtschaftswissenschaften. Sie treten auf, wenn kleine Störungen zu weitreichenden Veränderungen führen. Solche Prozesse reichen vom Klimawandel über Veränderungen im Konsumverhalten bis zu Epidemien oder einem Einbruch der Finanzmärkte. Allerdings werden die gemeinsamen, umfassenden Prinzipien der Kippunkte und die jeweils besonderen Aspekte der Systeme bisher nicht oder nur schlecht verstanden.

## KIPPPUNKTE – EINE INTERDISZIPLINÄRE DEFINITION

Im Fellow-Projekt befassten wir uns mit Kippunkten, die in der Biologie und den Wirtschaftswissenschaften auftreten, indem wir ihre allgemeine Dynamik durch mathematische Modellierung beschrieben. Das Ziel des Projekts war einerseits Kippunkte zu klassifizieren, die in den verschiedenen Disziplinen vorkommen, und so eine einheitliche Beschreibung der Phänomene zu erlangen. Andererseits bezweckten wir, mathematische Modelle zu entwickeln, mit denen das Auftreten von Kippunkten in experimentellen und empirischen Systemen untersucht werden kann.

Im ersten Schritt entwickelten wir, motiviert durch das Fehlen eines einheitlichen und klaren Begriffs von Kippunkten in der Literatur, eine mathematisch konsistente und präzise Definition des Phänomens und untersuchten diese anhand von Beispielen aus unterschiedlichen Fachgebieten. Dieser neue Rahmen bildete sich aus interdisziplinären Diskussionen der Kollegmitglieder und weiterer Marsilius-Fellows

heraus. Ebenso wurde er maßgeblich durch eine Serie von Seminaren der Angewandten Mathematik geprägt, in der Ideen und Kontroversen der Fellow-Treffen präsentiert und mit Student\*innen und Nachwuchswissenschaftler\*innen aus der Mathematik diskutiert wurden. Dieser Teil des Projekts vergrößerte das Verständnis von Kippunkten in den unterschiedlichen Fachbereichen und führte zu einer einheitlichen, mathematisch exakten Konzeption.

Dabei wurde die folgende Definition entwickelt:

*Ein **Kippunkt** ist ein markanter Schwellenwert eines Systemparameters. Er ist üblicherweise zeit- und/oder zustandsabhängig. Charakterisierend für einen Kippunkt ist die Eigenschaft, dass bereits eine kleine Veränderung des Parameters über den Kippunkt hinaus eine (lokal/kurzfristig) unumkehrbare Änderung des qualitativen Verhaltens des Systems hervorruft. Insbesondere ändert sich langfristig das dynamische Verhalten und der erreichte Zustand des Systems fundamental.*

Interessanterweise wird diese Definition durch die mathematische Formulierung des Konzepts der „Subkritischen Bifurkation“ präzise beschrieben. In seiner Begriffsbestimmung bietet dieses ein Kriterium, mit dem Kippunkte in entsprechenden mathematischen Modellen identifiziert werden können. Zugleich ermöglicht es ein Verständnis davon, welche nichtlinearen Komponenten der Modelldynamik das Phänomen bewirken und welche Arten der Rückkopplung (Feedback) daher zur Erklärung untersucht werden sollten. Mathematische Modelle der Dynamik am Kippunkt könnten folglich dazu in der Lage sein, das Systemverständnis und damit die Steuerung der entsprechenden Entscheidungsprozesse zu verbessern. Dies gilt insbesondere für Prozesse, die an der Schnittstelle zwischen Ökologie und Ökonomie auftreten. Deshalb ist es notwendig, Modelle von Systemen mit einem Kippunkt zu entwickeln, um die zugrundeliegenden Prozesse besser zu verstehen.

Um die Existenz und die Funktion von Kippunkten in der Biologie und den Wirtschaftswissenschaften zu erforschen, fokussierten wir uns auf bestimmte Fragestellungen und Probleme aus den Forschungsbereichen unserer jeweiligen Gruppen.

## **KIPPPUNKTE IN ÖKOSYSTEMEN – DIE VIKTORIABARSCHFISCHEREI**

Motiviert davon, ein allgemeines Verständnis von Kippunkten in stark genutzten Ökosystemen zu entwickeln, legten wir einen Fokus auf die Analyse der Viktoria-

barschfischerei. Daraus resultierte ein neues Promotionsprojekt, das gemeinsam von Timo Goeschl und mir betreut wird. Für dieses Projekt stellten wir den Doktoranden Johannes Kammerer ein. Bisher wurde in diesem Rahmen ein mathematisches Modell der Viktoriabarschfischerei entwickelt, das die Populationsdynamik unter Berücksichtigung des Ökosystems beschreibt. Das größen aufgelöste und zeitabhängige Modell erklärt die Dynamik des Fischbestands und macht es möglich, den Einfluss der Fischerei auf die Populationsgröße und -verteilung zu untersuchen. Auf diese Weise soll ermittelt werden, welche Intensität des Fischfangs wirtschaftlich optimal und nachhaltig ist. Zudem soll, in der Zusammenarbeit mit ökonomischen und psychologischen Forscher\*innen, geklärt werden, was entscheidende Faktoren für einen stabilen Fischbestand sind und welche sozio-ökonomischen Institutionen effektiv dazu beitragen können. Damit kann untersucht werden, ob und unter welchen Bedingungen die kollektive Dynamik der Fischer zu einem Kipppunkt in der Viktoriabarschfischerei führen kann. Im Zuge des Projekts wurde auch eine Kollaboration mit Fischerei-Expert\*innen aus den an den See angrenzenden Ländern Tansania, Kenia und Uganda aufgebaut, mit denen in regelmäßigem Abstand Forschungsfragen diskutiert werden.

## **KIPPUNKTE IN DER ZELLBIOLOGIE – RELEVANZ FÜR ALTERUNGSPROZESSE**

Ein anderer wichtiger Wissenschaftszweig, der sich mit plötzlichen Veränderungen von dynamischen Eigenschaften in komplexen Systemen befasst, ist die Zellbiologie, wenngleich hier der Begriff des Kipppunktes nicht explizit verwendet wird. In der Biologie basieren wesentliche Entwicklungs- und Regenerationsprozesse auf der Selbsterneuerung und Differenzierung von Stammzellen, die in der Lage sind, in einem mehrschrittigen Prozess eine große Anzahl spezialisierter Zelltypen hervorzubringen. Die während dieses sog. Differenzierungs-Prozesses auftretenden verschiedenen Zellstadien sind durch Genexpressions-Programme definiert, die auf der Ebene einzelner Zellen messbar sind.

Selbst wenn Änderungen in der Genexpression graduell ablaufen, bedingen sie letztendlich einen kritischen Übergang zwischen den einzelnen Aktivierungsstadien der Zellen. In Kooperation mit Ana Martin-Villalba haben wir uns mit abrupten Übergängen (sogenannten Switches) zwischen verschiedenen Zellzuständen befasst, die auf Kippunkte zurückzuführen sein könnten. Derartige Transitionen treten

sowohl bei der Regeneration von Hirngewebe (adulte Neurogenese) als auch während der Alterung des Gehirns auf. Als Ausgangspunkt diente uns ein Modell der adulten Neurogenese, welches wir 2019 gemeinsam im Journal Cell publizierten. In dieser Arbeit zeigten wir, dass relevante Zustandsübergänge wie z.B. die Aktivierung neuronaler Stammzellen, altersabhängig sind.

Im Rahmen dieses Marsilius-Projektes haben wir begonnen, diejenigen Mechanismen zu untersuchen, die diesen Veränderungen zugrunde liegen. Aus Experimenten wissen wir, dass involvierte kritische Zustandsübergänge durch niederschwellige Signale bei der Genexpression blockiert werden können. Eine mechanistische Beschreibung dieses Phänomens kann nicht nur unser Verständnis des Alterungsprozesses verbessern, sondern hilft auch, die zugrundeliegenden biologischen Abläufe zu quantifizieren. Letzteres ist eine Grundvoraussetzung für deren Kontrolle bzw. Beeinflussung.

Ein Schwerpunkt des Marsilius-Projekts bestand in der Untersuchung der Frage, welche Regulationsmechanismen im Alterungsprozess unverändert bleiben, welche von stetiger Natur sind und welche abrupten Änderungen oder Kippunkten unterliegen. Zur Beantwortung dieser Frage haben wir neue Modelle entwickelt und sie, basierend auf experimentellen Daten, validiert. Dies resultierte in einem neuen Promotionsprojekt an der Grenze zwischen Mathematik und Zellbiologie sowie einem neuen Doktoranden (Jooa Hooli) in unserem gemeinsamen Team. Darüber hinaus haben unsere Arbeiten im Rahmen des Marsilius-Kollegs dazu beigetragen, eine Hierarchie von Zustandsübergängen in der altersabhängigen Regulation der adulten Neurogenese zu identifizieren. Ferner haben wir neuartige Phänomene in unseren experimentellen Daten beobachtet, die von keinem der gegenwärtig existierenden Modelle erklärt werden können.

## RESÜMEE

Zusammenfassend hat meine Aktivität im Rahmen des Marsilius-Kollegs in 2019/20 zu verschiedenen neuen interdisziplinären Forschungsergebnissen geführt (Publikationen in Vorbereitung), die auch neue Projekte zwischen Gruppen aus verschiedenen Disziplinen initiiert haben. Unter anderem sind – wie geschildert – zwei Promotionsprojekte daraus hervorgegangen, die bereits jetzt mit vielversprechenden vorläufigen Ergebnissen aufwarten können. Die Konzeption dieser

Promotionsprojekte auf dem Gebiet der mathematischen Modellierung hat wesentlich zur Interaktion zwischen verschiedenen Disziplinen geführt. Sie trägt insbesondere auch zur Entwicklung einer fächerübergreifenden, mathematischen Herangehensweise bei, die es erlauben wird, die Resilienz und Irreversibilität von Zustandsübergängen zu untersuchen. Der von uns verfolgte, mathematische Ansatz hilft, verschiedenste Beobachtungen auf grundlegende Prinzipien – ähnlich physikalischen Gesetzen – zurückzuführen und auf diese Weise z.B. biologische und ökonomische Prinzipien der Systemevolution von einem allgemeinen Standpunkt aus zu verstehen. Das Projekt am Marsilius-Kolleg hat uns die ersten Schritte in der Entwicklung einer umfassenden und systematischen Theorie in dieser Richtung ermöglicht. Das Fellow-Programm war außerdem eine wesentliche Erfahrung des multidisziplinären Diskurses, die sich sowohl in meiner zukünftigen Forschung als auch in meinem akademischen Profil reflektieren wird.