Zur Erkennbarkeit unvollständiger Muster

Wolfhard Schlosser

Einleitung

Die Ergebnisse empirischer Wissenschaften basieren meist nur auf ‚Stichproben', wie die Statistik dies nennt. Sie sind also durch Daten gekennzeichnet, die lediglich einen Teil der ursprünglichen Realität darstellen, der so genannten ‚Grundgesamtheit'. Gerade in der Archäologie hängt die Entdeckung eines Fundes oder Befundes von vielen Zufälligkeiten ab. So kann eine Baumaßnahme oder Befliegung die Entdeckung fördern, während die Bodenerosion andererseits ein ehedem prominentes Objekt schon längst vernichtet haben mag. Je größer die Fläche ist, über die sich eine ursprünglich kohärente Struktur erstreckt, desto stärker wirkt diese Zufälligkeit. Findet der Archäologe einige Pfostenlöcher, die dem Grundriss eines vorzeitlichen Hauses zugeordnet werden können, so wird er im Regelfall dieses Muster auch vollständig durch eine archäologische Ausgrabung erfassen. Seine Erfahrung sagt ihm nämlich, dass dieses Haus nicht länger als einige zehn Meter sein wird, der Aufwand sich also in erträglichem Rahmen halten dürfte. Erstrecken sich vergleichbare Funde hingegen über viele Kilometer, so muss davon ausgegangen werden, dass vieles unentdeckt bleibt (oder inzwischen zerstört wurde), ein möglicherweise zugrunde liegendes Ordnungsmuster also nur partiell erkennbar wird.

Grundsätzlich sollte die Existenz solcher Muster nicht in Frage gestellt werden: die Küstenwüsten Südamerikas zeigen zur Genüge, dass derartiges existiert. Kilometerlange Liniensysteme sowie riesige Abbildungen von Spinnen und Affen belegen dies hinreichend (Nazca). Das Klima und die intensive Bodenbearbeitung in Mitteleuropa dürften aber vergleichbare Muster bei uns auf spärliche Rudimente reduziert haben, die sich allenfalls nur auf simple geometrische Figuren überprüfen lassen. Damit beschränkt sich das in diesem Aufsatz behandelte Problem auf die folgende Frage:

> Gegeben seien n Objekte in der Landschaft, für deren Anordnung man ein relativ einfaches geometrisches Grundmuster vermutet. Welche geometrischen Gebilde sind als Deutung dieses Grundmusters vertretbar, und welche nicht?

Es wird sich zeigen, dass bei einfachen Figuren eine Antwort auf diese Frage existiert, die auch praktikabel ist. Ebenso wird deutlich, dass der Nachweis etwas komplexerer geometrischer Systeme eine deutlich größere Anzahl von Objekten erfordert, als gemeinhin angenommen wird, oder sogar unmöglich ist. Es sollte dann nicht mehr vorkommen, dass selbst archäologische Fachzeitschriften Deutungen publizieren, bei denen die Anzahl der hinein interpretierten geometrischen Elemente vergleichbar ist mit der Zahl der zugrunde liegenden Punkte (Kerner 2004): 27 Geraden und sechs Kreise durch 50 Steine bzw. Steingruppen.

Freiheitsgrade einer geometrischen Figur

Der Begriff des Freiheitsgrades (FG) ist grundlegend für viele Bereiche der Physik und Mathematik. Ein Punkt im Raum hat drei Freiheitsgrade oder unabhängige Bestimmungsstücke, denn er kann seinen Ort in der x-, y- und z-Richtung frei einnehmen. Wird der Punkt zum Körper (zum Beispiel zu einem unregelmäßig geformten Stein), so hat er sechs Freiheitsgrade, denn zu seinem Schwerpunkt (drei Freiheitsgrade) kommt noch eine Richtung hinzu, beispielsweise die vom Schwerpunkt zum davon entferntesten Teil des Körpers. Das ergibt zwei weitere Freiheitsgrade, denn diese Richtung hat ein Azimut und eine Elevation. Schließlich kann sich der Stein noch um die so definierte Achse drehen – sein sechster Freiheitsgrad. Dieser Begriff der Freiheitsgrade lässt sich auch auf zweidimensionale geometrische Figuren übertragen, von denen im Folgenden die Rede sein wird.

In der Ebene (und hier ist an die Erdoberfläche zu denken) hat ein Punkt zwei Freiheitsgrade, nämlich seine beiden Gauß-Krüger-Koordinaten oder die geographischen Koordinaten λ und ϕ. Ein Kreis hat drei Freiheitsgrade, nämlich seinen Mittelpunkt (2 FG) und den Radius (1 FG). Ein allgemeines Dreieck besitzt sechs Freiheitsgrade, die auf verschiedene Weise bestimmt werden können. Man kann entweder von den drei Eckpunkten des Dreiecks ausgehen (3 x 2 FG = 6 FG), oder aber von seinem Schwerpunkt (2 FG), den drei Seitenlängen (3 FG), sowie dem Winkel etwa der längsten der drei Seiten gegen eine Bezugsrichtung (1 FG). Auch hier ergibt sich 2+3+1 = 6. Entsprechend ergibt sich, dass eine Strecke oder ein Quadrat vier Freiheitsgrade haben, ein Rechteck oder eine Ellipse fünf. Die Tabelle 1 führt einige Beispiele dazu auf.

Tabelle 1

Geometrische Grundfigur	Anzahl der Freiheitsgrade
Punkt, Gerade	2
Strahl, Kreis	3
Strecke, gleichseitiges Dreieck, Quadrat	4
Gleichschenkliges Dreieck, Rechteck, Rhombus, Ellipse	5
Allgemeines Dreieck, symmetrisches Trapez	6

Diese Tabelle zeigt, dass die ‚Komplexität' einer Figur, die man ihr gefühlsmäßig zuordnet, nicht unbedingt konform geht mit der Zahl ihrer Freiheitsgrade. Eine frei orientierte Ellipse ist in diesem Sinne einfacher als das allgemeine Dreieck.

Enthält eine zusammengesetzte Figur mehrere Grundfiguren, die voneinander unabhängig sind, so addieren sich deren Freiheitsgrade. Dies gilt nicht, wenn die Figuren sich aufeinander beziehen. Ein Quadrat beispielsweise besteht aus vier Strecken (mit je 4 FG), nämlich den vier Seiten. Deswegen hat es aber nicht 4x4 FG = 16 FG, sondern nur vier. Ein Mehr an Freiheitsgraden ergibt sich erst dann, wenn diese vier Strecken etwa wie hingestreute Mikadostäbchen in zufälliger Orientierung neben- oder übereinander liegen.

Davon ausgehend lässt sich folgende Fragestellung formulieren: Wenn in der Vorzeit ein großräumiges geometrisches Muster (z. B. eine Ellipse oder ein Quadrat) in einer für alle damals erkennbaren Weise durch N archäologische Objekte punktweise markiert wurde – wie viele Punkte n ≤ N müssen archäologisch nachgewiesen worden sein, um das ursprüngliche Muster zu erkennen? Oder etwas einfacher: Welche geometrischen Figuren (auch Zusammensetzungen daraus) sind mit den n Punkten seriöserweise noch verträglich, und welche nicht mehr?

Eine Beantwortung dieser Frage bezieht in gleicher Weise die Mathematik wie auch die menschliche Fähigkeit zur Mustererkennung mit ein. Sie ist somit nicht einfach aus einem ‚Axiomensystem' ableitbar, sondern bedarf der Versuchsperson als Entscheidungsträger. Es scheint übrigens, dass dieser eigentlich so nahe liegenden und auch praxisbezogenen Frage bisher noch nicht hinreichend Aufmerksamkeit geschenkt wurde.

Versuchsdurchführung

Die Abb. 1–5 zeigen eine Sequenz zunehmend komplexerer und flächenfüllenderer Figuren in jeweils sechs Feldern. Diese Muster decken die in der Praxis vorkommenden Fälle in brauchbarer Näherung ab. Die sicher zu erkennende (Ausgangs-)Figur ist stets rechts unten gelegen und durch die Anzahl ihrer Punkte N gekennzeichnet. Durch zufällige Wegnahme von Punkten entstanden die verbleibenden fünf Felder – ebenfalls mit den jeweiligen Punktzahlen n. Das Feld jeweils links oben mit der geringsten Punktzahl erlaubt noch kein sicheres Erkennen. Im Einzelnen sind die folgenden Figuren dargestellt oder kombiniert:

Tabelle 2

Abbildung	Geometrische Figur(en)	Freiheitsgrade FG
1	Allgemeines Dreieck	6
2	Rechteck und Ellipse, getrennt	10
3	Ellipse, gleichschenkliges Dreieck, zwei Strecken, durchdringend	18
4	Schachbrett (4x4 Felder)	19
5	Überlagerung von Abb. 3 und 4	37

Will man selbst den Test zur Erkennbarkeit unvollständiger Muster machen, so präsentiere man die Teilfelder einer Versuchsperson, wobei man zweckmäßigerweise mit dem Feld geringster Punktezahl beginnt und dann in Richtung ansteigender Werte fortfährt.

Glaubt der Teilnehmer, das Muster bei n Punkten erraten oder sogar erkannt zu haben, so bestimme man den Wert

$$w = \frac{n}{FG}$$

Im Gegensatz zu dem stark variierenden n, das im vorliegenden Falle zwischen etwa 17 und über 200 liegen kann, ist w recht konstant. Tests mit mehreren Personen ergaben die folgenden Zahlen der Tabelle 3.

Tabelle 3

Abbildung	w
1	2,8
2	2,9
3	3,8
4	4,5
5	> 5

Die Streuungen um die Mittelwerte w dieser Tabelle lagen zwischen 0,1 und 0,3.

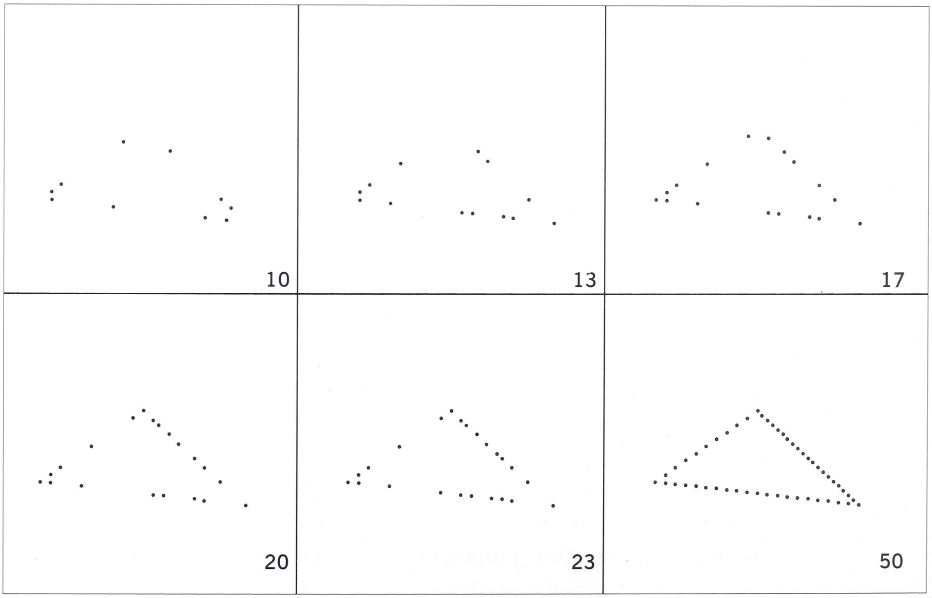

Abb. 1 Allgemeines Dreieck.

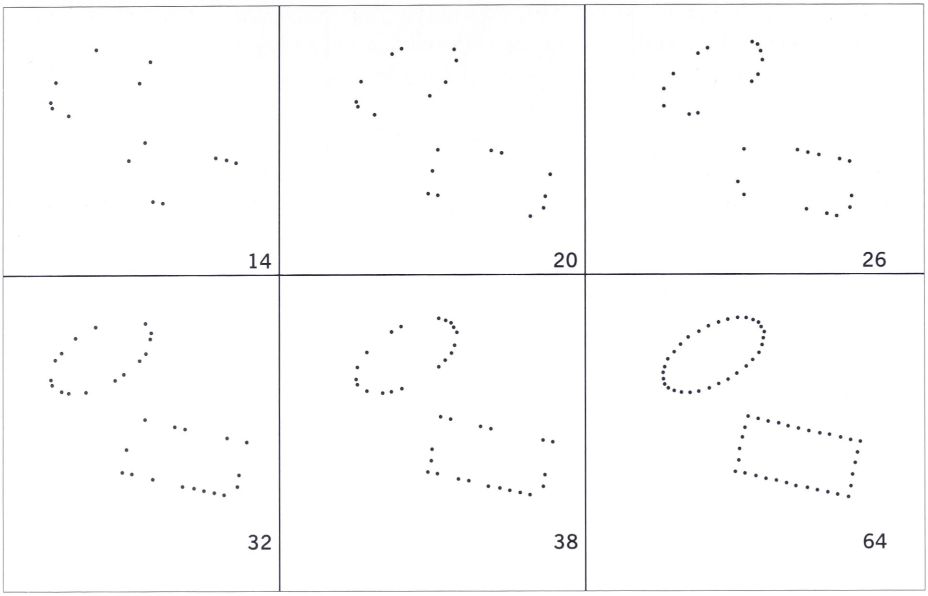

Abb. 2 Rechteck und Ellipse, getrennt.

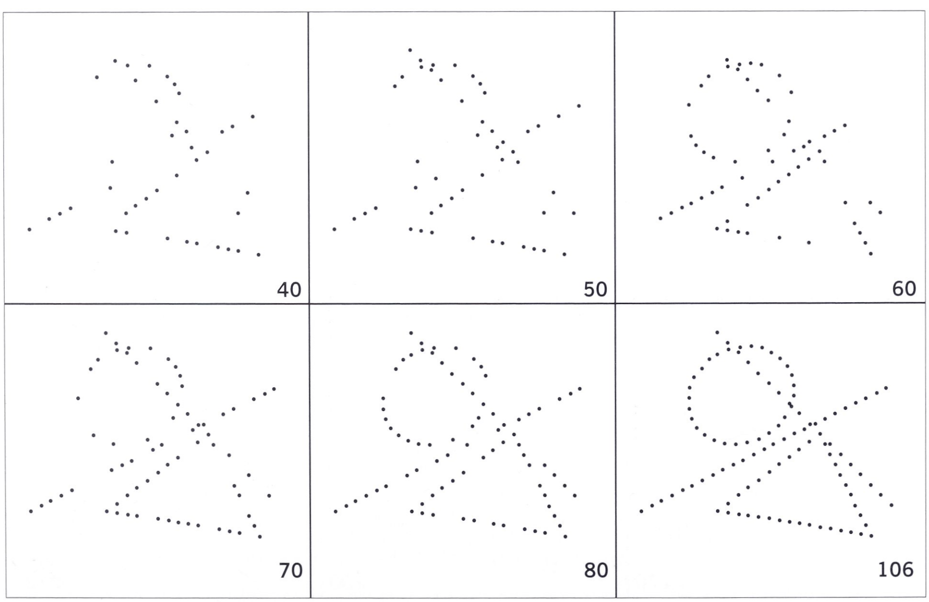

Abb. 3 Ellipse, gleichschenkliges Dreieck, zwei Strecken, durchdringend.

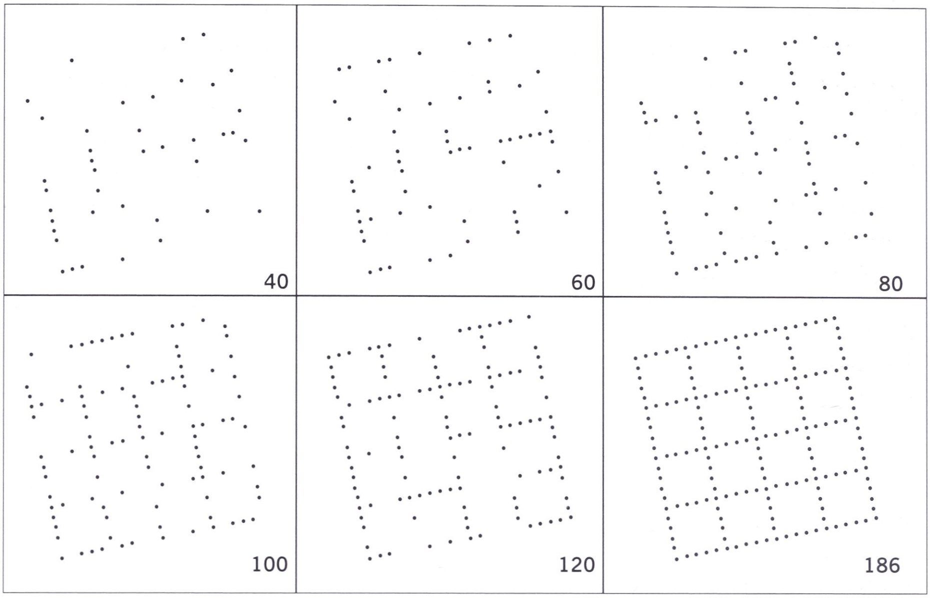

Abb. 4 Schachbrett (4x4 Felder).

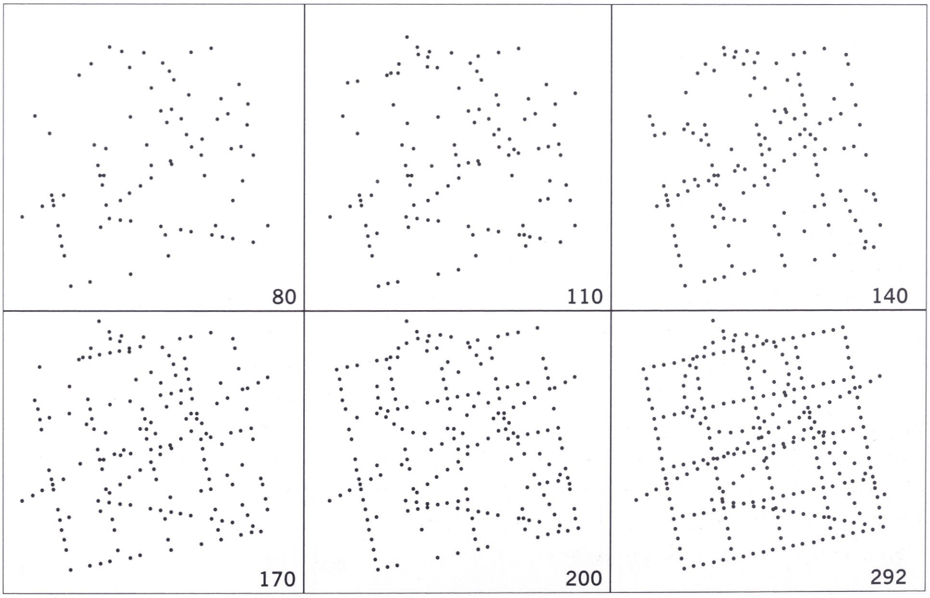

Abb. 5 Überlagerung von Abb. 3 und 4.

Schlussfolgerungen

Die Abbildungen 1–4 ergeben ein mittleres w von rund 3,5. Hat man also ein Feld mit n Punkten und vermutet darin einige geometrische Figuren, so bestimme man gemäß Tabelle 1 deren Freiheitsgrade FG. Unterschreitet n/FG dieses w = 3,5 deutlich, so wäre eine solche geometrische Interpretation nicht mehr vertretbar. Man erkennt auch, dass der Wert von w mit der Komplexität des Musters etwas ansteigt. Als erste Abschätzung, ob eine vermutete geometrische Ordnungsstruktur als Arbeitshypothese überhaupt weiterverfolgt werden sollte, ist die Zahl 3,5 aber sicher hilfreich.

Abb. 5 ist insofern lehrreich, als Punktverteilungen, die die verfügbare Fläche mehr oder weniger voll ausfüllen, überhaupt keine sinnvolle Deutung mehr erlauben (w > 5). Die Umrisse einfach deutbarer geometrischer Figuren sind nämlich stets ‚dünn' im Vergleich zur Gesamtfläche, und das sollte auch bereits im Ausgangsmaterial zu erkennen sein. So wäre es wirklich unzulässig, aus 200 recht gleichmäßig verteilten Scherbenfunden daraus zwei Ellipsen, ein Rechteck, drei Kreise, drei allgemeine Dreiecke und zwei Strecken rekonstruieren zu wollen, wie dies mit einem angenommenen w = 4 und der Summe der Freiheitsgrade dieser Figuren von 50 (Tabelle 1) als Rechenexempel ermittelt werden könnte.

Ich danke Herrn Prof. Dr. L. Gerritzen von der Fakultät für Mathematik der Ruhr-Universität Bochum für hilfreiche Diskussionen.

Zusammenfassung

Für gleichartige archäologische Funde oder Befunde in größerer Zahl wird manchmal ein übergeordnetes geometrisches Muster vermutet, das ihre Verteilung regelt. Die Akzeptanz derartiger Ordnungsstrukturen (südamerikanische Geoglyphen) oder ihre Ablehnung (‚leys' oder ‚Heilige Linien' in Mitteleuropa) gründete sich bisher allerdings eher auf visueller Inspektion des vorgelegten Material als auf einer statistischen Analyse. Die vorliegende Arbeit zeigt jedoch, dass es – zumindest bei einfachen geometrischen Figuren – ein praktikables Verfahren gibt, eine vermutete Ordnungsstruktur als weitere Arbeitshypothese gelten zu lassen. Zu diesem Zweck klassifiziere man die angenommenen geometrischen Grundstrukturen gemäß Tabelle 1 und multipliziere die dort aufgeführten Freiheitsgrade (FG) mit dem Faktor 3,5. Das Ergebnis ist die notwendige Mindestzahl der Funde/Befunde, die diese Annahme rechtfertigt. Vermutet man beispielsweise, dass frühchristliche Kirchen eines gegebenen Areals ein recht einfaches vorzeitliches Ordnungsmuster nachzeichnen, dem lediglich vier unabhängige Strecken zugrunde lagen, so sind mindestens 56 Kirchen notwendig, um dieses Muster zu verifizieren. Dieses Beispiel macht klar, dass der Nachweis vorzeitlicher Ordnungsstrukturen ein erheblich größeres Datenmaterial erfordert als üblicherweise angenommen. Sind die Muster überdies nicht mehr ‚dünn' auf der Gesamtfläche verteilt, so wird ein seriöser Nachweis eines zugrunde liegenden Musters *de facto* unmöglich.

Summary

Perceptibility of incomplete samples

For similar archaeological finds or features in larger numbers sometimes a superordinated geometric pattern is suspected which regulates their distribution. So far, the acceptance of such principles or their rejection was based more on visual inspection of the presented material than on statistical analysis. The work in hand shows, however, that – at least for simple geometrical figures – a practicable method exists to allow a suspected principle to be regarded as a further working hypothesis. To this end one classifies the adopted basic geometric structures according to table 1 and multiplies the degrees of freedom (FG) listed there by the factor 3.5. The result is the required minimum number of finds/features which justifies this assumption. If one suspects, for example, that early Christian churches of a given area follow a quite simple prehistoric basic pattern merely founded on four independent distances, at least 56 churches are necessary to verify this pattern. This example shows that the detection of prehistoric principles requires substantially larger data material than normally assumed. Moreover, if the patterns are not even 'sparsely' distributed over the total area, a serious verification of an underlying pattern is de facto impossible.

Literaturverzeichnis

Kerner 2004
M. Kerner, Die Megalithen auf Planezzas, Falera GR. helvetia archaeologica 35/2004, 32–46 (speziell die dortige Abb. 7).

Anschrift

Prof. Dr. Wolfhard Schlosser
Astronomisches Institut
der Ruhr-Universität
D-44780 Bochum