MATHEMATISCHES BEI PLATON
(Fortsetzung)*

Die Ergebnisse der Untersuchungen von Neuenschwander haben mich veranlaßt zu überprüfen, in welchen Sätzen der Bücher I–IV aus Euklids *Elementen*, von denen die Bücher II–IV und Teile von Buch I ihrem Inhalt nach traditionell als voraristotelisch gelten[121], der Terminus σημεῖον in der Protasis vorkommt, um auf diese Weise zu testen, ob sich die These, nach der die Griechen vor der Zeit des Aristoteles noch nicht von Punkten im allgemeinen gesprochen haben, aufrecht erhalten läßt. Dabei ergab sich zunächst, daß der Terminus σημεῖον in keiner Protasis der Sätze aus den Büchern II und IV nachweisbar ist. Sie dürften daher nicht nur voreuklidisch, sondern auch voraristotelisch sein, während die Anwendung des fraglichen Kriteriums im Falle der Bücher I und III die Gelegenheit dazu bot, frühe Sätze von solchen zu unterscheiden, die nicht vor Aristoteles in den Text der *Elemente* eingegangen sein dürften[122].

In den soeben angeführten Fällen ging die These, nach der es in der griechischen Mathematik vor Aristoteles keinen Terminus zur Bezeichnung für den ‚Punkt im allgemeinen' gab, als Prämisse in die Begründung für die relative Datierung einer Reihe von Sätzen aus den Büchern I–IV der *Elemente* ein. Wie ich im folgenden zeigen werde, eignet sich das oben angeführte Kriterium von Neuenschwander aber auch zu einer Datierung der Termini στιγμή und σημεῖον, wenn man dabei außerdem das Proömium aus Platons *Theaetet* mit in Betracht zieht, das chronologisch der zweite mathematische Text ist, der von den frühen Phasen in der Entwicklung der griechischen Mathematik berichtet. Die dort von Platon benutzte Terminologie ist zwar nicht ganz präzise; aber seine Ausführungen, die er an der fraglichen Stelle dem noch ganz jungen Theaetet aus Sunion in den Mund legt[123], lassen mit Sicherheit erkennen, daß die folgenden Begriffsbestimmungen aus Euklids *Elementen* damals schon bekannt waren:

* Der erste Teil dieses Beitrages liegt in WJ 24, 2000, 37–64 vor.

121 Neuenschwander, Die ersten vier Bücher der Elemente Euklids (wie Anm. 120) 378 und Bartel Leendert van der Waerden, Die Pythagoreer. Religiöse Bruderschaft und Schule der Wissenschaft, Zürich/München 1979, 337–362.

122 Ich trage hier kurz nach, daß die Sätze I.7, I.23 und I.31, die in meinem Aufsatz über die Indizien zur Datierung der geometrischen Termini στιγμή und σημεῖον als Bezeichnungen für den ‚Punkt im allgemeinen' auf die Zeit von Eudoxos und Aristoteles (wie Anm. 119) versehentlich unerwähnt blieben, nacharistotelisch sind.

123 Nach dem eindeutig rekonstruierbaren Sinn der Zeilen 147C–148B aus dem *Theaetet* ist das Wort δύναμις dort an einigen Stellen mit ‚Quadrat' zu übersetzen, während

Def. X.2: Strecken sind dem Quadrat nach kommensurabel, wenn die Quadrate über ihnen von derselben Fläche gemessen werden. Dem Quadrat nach inkommensurabel sind sie dagegen, wenn für die Quadrate über ihnen keine Fläche als gemeinsames Maß erzeugt werden kann[124].

Def. X.3: Wenn man diese Voraussetzungen macht, läßt sich beweisen, daß es zu [je]der vorgelegten Strecke der Anzahl nach unendlich [viele] kommensurable und ebenso [der Anzahl nach unendlich viele mit ihr] inkommensurable Strecken gibt. Von den [zuletzt genannten] sind die einen [zu der vorgelegten Strecke] nur der Länge nach [inkommensurabel], die anderen dagegen auch dem Quadrat nach[125].

In diesen Begriffsbestimmungen ist die Methode fundiert, nach der die meisten der für die Lehre aus dem X. Buch der *Elemente* typischen Sätze bewiesen werden; denn die Relationen, die zwischen den jeweils untersuchten Streckenpaaren bestehen, werden zumeist dadurch ermittelt, daß man über ihnen Quadrate errichtet, und

es an anderen Stellen mit dem Wort ‚Quadratseite' wiedergegeben werden muß. Das hat zu der Vermutung geführt, daß die Geometer zur Zeit von Platon noch nicht festgelegt hatten, welches Objekt ihrer Wissenschaft das Wort δύναμις bezeichnen soll (s. Jens Hoyrup, Dynamis, the Babylonians, and Theaetetus 147c4–148d7, in: HM 17, 1990, 201–222). Das halte ich jedoch für unwahrscheinlich; denn Platons Ausführungen setzen voraus, daß ihm und seinen Lesern wesentliche Teile der Lehre aus dem X. Buch der *Elemente* bekannt waren, deren Formulierung eine präzise Begrifflichkeit erfordert. Statt dessen sollte man bedenken, daß Theaetet von Platon als ein Kind vorgestellt wird (παῖς 148B4), das über erstaunliche Einsichten in einen mathematisch keineswegs trivialen Sachverhalt verfügt. Wenn er den jungen Theaetet dieses Wissen nun auch noch more geometrico im Stile eines Archimedes oder Euklid vortragen ließe, würde der Knabe allzu erwachsen wirken. Statt dessen sprudelt die fragliche Einsicht in den Zeilen 147C–148B aus dem jungen Theaetet in einer noch nicht völlig ausgeformten Sprache hervor, wobei sich Platons Kunst als Schriftsteller nicht zuletzt darin zeigt, daß seine dem genauen Wortlaut nach mathematisch nicht ganz korrekten Ausführungen von jedem verständigen Leser automatisch korrigiert werden können und daher sehr wohl zeigen, was der junge Theaetet sagen wollte.

[124] Euklid, Elem. Def. X.2: εὐθεῖαι δυνάμει σύμμετροί εἰσιν, ὅταν τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα τῷ αὐτῷ χωρίῳ μετρῆται, ἀσύμμετροι δέ, ὅταν τοῖς ἀπ' αὐτῶν τετραγώνοις μηδὲν ἐνδέχεται χωρίον κοινὸν μέτρον γενέσθαι.

[125] Euklid, Elem. Def. X.3: τούτων ὑποκειμένων δείκνυται, ὅτι τῇ προτεθείσῃ εὐθείᾳ ὑπάρχουσιν εὐθεῖαι πλήθει ἄπειροι σύμμετροί τε καὶ ἀσύμμετροι αἱ μὲν μήκει μόνον, αἱ δὲ καὶ δυνάμει. Diese Begriffsbestimmung geht bei Euklid mit folgender Erklärung zu Ende: „Die vorgelegte Strecke werde nun expressibel (ῥητός) genannt. [Dann sollen] auch die mit dieser [Strecke] sowohl der Länge als auch dem Quadrat nach oder [auch] nur dem Quadrat nach kommensurablen [Strecken] expressibel heißen, während die mit ihr inkommensurablen [Strecken] irrational (ἄλογος) heißen mögen". Zu diesem Schluß der Def. X.3, die der Autor der Linienschrift als bekannt voraussetzt (*De lineis* 968b13–23), gibt es im Proömium des *Theaetet* keine Parallele. Im übrigen sei noch betont, daß die beiden letzten Sätze aus der Def. X.3 keineswegs ein für allemal festlegen, welche Strecken expressibel sind. Statt dessen sagen sie nur, welche Strecken expressibel sind, sobald man irgendeine Strecke dadurch ausgezeichnet hat, daß sie expressibel sein soll (während dieselben Strecken bei einer anderen Wahl der die Expressibilität festlegenden Strecke sehr wohl irrational sein können).

dann die Relationen zwischen diesen Flächenpaaren analysiert[126]. Als Platon seinen Dialog *Theaetet* schrieb, dürften demnach zumindest Teile des Satzsystems aus dem Buch X der *Elemente* vorgelegen haben, während eine Datierung der ganzen darin zusammengestellten Theorie, die ihrem Umfang nach ein Viertel der *Elemente* ausmacht, auf die Zeit Platons oder gar des Theaetet aus Sunion vorschnell wäre. Zwei Definitionenfolgen, die im Anschluß an die Sätze X.47 und X.84 in den Text von Buch X eingeschoben sind, sprechen dafür, daß diese Abhandlung, die nach Ausweis der aus dem 5. Jahrhundert stammenden Fragmenta Veronensia[127] bei Euklid wahrscheinlich in drei Bücher zerfiel, die erst von einem spätantiken Redakteur des Archetypen der erhaltenen Handschriften zusammengefaßt worden sind[128], (mindestens) einmal überarbeitet worden ist. Darauf könnte auch eine Notiz aus dem sogenannten Mathematikverzeichnis des Proklos anspielen[129], nach der Hermotimos aus Kolophon mit seinen Lehren an Vorarbeiten des Theaetet und des Eudoxos anknüpfte, über die er dabei weit hinausging. Zum andern hat P. Tannery in seinem Aufsatz «Sur l'authenticité des axiomes d'Euclide» schon 1884 darauf aufmerksam gemacht, daß die Elemente ein Sammelwerk sind, das aus Teiltheorien zusammengefügt ist, die von Euklid vor ihrer Integration in das Gesamtwerk zum Teil nur oberflächlich aneinander angeglichen worden sind[130], und das verweist nun insgesamt auf eine Möglichkeit zur Prüfung der These, nach der die griechischen Geometer vor Aristoteles noch keinen Terminus zur Bezeichnung von Punkten kannten:

Wenn Teile des X. Buchs der *Elemente* auf die Zeit von Theaetet zurückgehen oder doch zumindest voraristotelisch sind, und wenn die Termini σημεῖον und στιγμή erst zur Zeit des Aristoteles in die Mathematik der Griechen Eingang fanden, ist zu erwarten, daß es Partien aus dem X. Buch der *Elemente* gibt, in denen der Terminus σημεῖον fehlt. Dabei verschärfte ich Neuenschwanders Kriterium noch dahingehend, daß ich die Sätze aus Buch X der *Elemente* nicht nur daraufhin überprüfte, ob das Wort σημεῖον in ihrer Protasis vorkommt, sondern auch, ob es in den zugehörigen Beweisen benutzt wird, und das führte zu folgendem Ergebnis:

[126] Bartel Leendert van der Waerden, Erwachende Wissenschaft. Ägyptische, babylonische und griechische Mathematik, Basel/Stuttgart [2]1966 [[1]1956; zuerst holländisch 1950], 276–277.

[127] Euclidis latine facti fragmenta Veronensia. Edidit Marius Geymonat, Milano/Varese 1964.

[128] Mario Geymonat, I romani di fronte alla geometria greca: dallo scontro con Archimede alla traduzione degli Elementi di Euclide, in: A. Martucci (ed.), Momenti e aspetti della sopravvivenza della cultura classica in età medioevale, Verona 1995, 33–43, dort 42.

[129] Proklos (wie Anm. 113) 67.20–22.

[130] Paul Tannery, Sur l'authenticité des axiomes d'Euclide, in: Bulletin des Sciences mathématiques 8 (Serie 2), 1884, 162–175 [wiederabgedruckt in P. Tannery, Mémoires scientifique. Publiés par J.-L. Heibert/J.G. Zeuthen. II: Sciences exactes dans l'antiquité 1883–1898, Toulouse/Paris 1912 [ND Paris 1995], 48–63.

Der Terminus σημεῖον kommt in Buch X erstmals in den Sätzen X.17–18 vor. Außerdem wird dort zum ersten Mal die Operation des elliptischen Anlegens einer Fläche an eine Strecke angewendet[131], die dann erst wieder in die Beweise der Sätze X.54, X.55, X.60 und X.63 eingeht, und schließlich ist von Christian Marinus Taisbak bereits ohne jeden Rückgriff auf philologische Indizien erkannt worden, daß die Sätze X.17–18 ein später Zusatz sind, in denen ein Inkommensurabilitätskriterium ausgesprochen wird, das in Buch X der *Elemente* auffallend isoliert dasteht[132].

Die nächsten Sätze aus dem X. Buch, in denen der Terminus σημεῖον vorkommt, sind das Lemma zum Satz X.41, bei dem es sich ganz offensichtlich um einen Nachtrag handelt, der den ursprünglichen unvollständigen Beweis des Satzes X.43 absichern sollte[133], und die Sätze X.42–X.47, in denen es um Eindeutigkeitsaussagen geht, für die ich nachstehend ein Beispiel anführe:
Satz X.42:
„Die Binomiale läßt sich nur in einem Punkt in die Nomina zerlegen".[134]

In diesem Satz geht es genauer um den folgenden Sachverhalt:
Eine Strecke AC werde von dem Punkt B in der Art geteilt, daß AB nicht größer als BC und AB mit BC nur dem Quadrat nach kommensurabel ist. Wenn E gleichfalls ein Punkt auf AC von der Art ist, daß AE nicht größer als EC und AE mit EC ebenfalls nur quadratisch kommensurabel ist, sind B und E gleich.

Solche Eindeutigkeitsaussagen sind im allgemeinen ein Indiz dafür, daß die dazugehörige Theorie schon weit entwickelt ist, und daher sprechen (neben dem Auftreten des Terminus σημεῖον) auch fachinterne Gründe dafür, daß die Sätze X.42–X.47 eine späte Phase in der Ausarbeitung des Satzsystems aus dem Buch X der *Elemente* markieren.

Den nächsten Beleg für das Vorkommen des Terminus σημεῖον im X. Buch der *Elemente*, das nach der Ausgabe von Heiberg insgesamt 115 Sätze enthält, bietet Satz X.55, der zum Kontext der Sätze X.17–18 gehört, von denen schon die Rede war. Danach kommt das Wort σημεῖον dann nur noch in den Sätzen X.91–X.97 und X.99–X.100 vor, wobei die Lücke in Satz X.98 auf den Schreiber des Archetypen der griechischen Handschriften zurückgehen dürfte; denn im Text der von

[131] Vom elliptischen Anlegen einer Fläche F an eine Strecke S spricht man, wenn man ein mit F gleiches Parallelogramm P, das darüber hinaus noch einem vorgelegten Parallelogramm P´ ähnlich sein soll, in der Art an S anlegt, daß ein Teil der Strecke S frei bleibt (ἐλλείπειν), der zusammen mit der freien Seite des Parallelogramms P ein drittes Parallelogramm P* bildet, das P´ ähnlich ist (s. Euklid, *Elemente*, Satz VI.28). In den Beweisen aus dem X. Buch der *Elemente* handelt es sich bei den fraglichen Parallelogrammen stets um Rechtecke.

[132] Christian Marinus Taisbak, Coloured Quadrangles. A Guide to the Tenth Book of Euclid's Elements, Kopenhagen 1982, 43.

[133] Siehe Clemens Thaer, Euklid, Die Elemente. Nach Heibergs Text übersetzt und herausgegeben von C. Thaer, Darmstadt 1971 [[1]1933–1937], 243–244 u. 458.

[134] Ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων κατὰ ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα (Euklid, *Elemente*, Satz X.42).

H.L.L. Busard edierten mittelalterlichen Übersetzung aus dem Griechischen ins Lateinische steht im Beweis des dort als X.99 gezählten Satzes für das τετμήσθω γὰρ ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν ausführlicher *secetur enim recta zm in duo equa secundum punctum n*[135]. Dazu sei noch ergänzend angemerkt, daß die Satzgruppe X.91–X.102 auch inhaltlich an die Sätze X.54–X.65 anknüpft[136], und das dürfte insgesamt dafür sprechen, daß wir hier wieder einen späten Zusatz zum alten Kern der Lehre aus Buch X vor uns haben.

Da das Nomen σημεῖον nur in 18 (oder 19) der 115 Sätze aus dem X. Buch der *Elemente* vorkommt, die auch nach innerfachlichen Kriterien auf eine nachträgliche Weiterentwicklung der darin zusammengestellten Lehre zurückgehen, wird man zunächst einmal den Schluß ziehen dürfen, daß wesentliche Teile dieser Theorie bereits vorlagen, als die griechischen Mathematiker noch nicht über einen Terminus zur Bezeichnung für den ‚Punkt im allgemeinen' verfügten[137]. Andererseits zeigt das Proömium aus dem *Theaetet*, daß die Theorie der inkommensurablen Größen aus dem X. Buch der *Elemente* schon weit entwickelt gewesen sein muß, als Platon diesen Dialog schrieb, und wie mir scheint, ist das ein starkes Indiz dafür, daß στιγμή und σημεῖον erst zur Zeit von Aristoteles zu Fachausdrücken der Mathematiker geworden sind. Darauf folgt a fortiori, daß die Definition I.1 samt der an sie anschließenden Begriffsbestimmungen I.2, I,5 und XI.1, in denen der Nachweis dafür fundiert ist, daß sich Linien und Flächen sowie Flächen und Körper (oder gar Linien und Körper) maßtheoretisch nicht miteinander vergleichen lassen, frühestens auf diese Zeit zurückgehen, und damit scheint mir hinlänglich sicher, daß Platon in der weiter oben ausführlich diskutierten Passage aus den *Nomoi* auf diese damals eben erst gelungene Entdeckung anspielt. Wie ich erläutert habe, hängt sie nun aber auf das engste mit der Einführung des Punktbegriffs in die Mathematik zusammen, und damit steht man vor der Frage, warum Platon das damit bezeichnete Objekt der Geometer nach dem Bericht des Aristoteles entschieden bekämpfte.

Dazu sei vorab daran erinnert, daß die griechischen Mathematiker ihre Wissenschaft spätestens seit der Zeit um 480 v.Chr. auch ohne die Vorstellung von einem ‚Punkt im allgemeinen' erfolgreich entwickelt haben[138], und als sie ihn dann

[135] Euklid, The Mediaeval Latin Translation of Euclid's Elements made directly from the Greek. Ed. Hubertus Lambertus Ludovicus Busard, Wiesbaden 1987.

[136] Dazu verweise ich auf C. Thaer (wie Anm. 133) 461.

[137] Die Verteilung der Sätze, in denen der Terminus σημεῖον vorkommt, spricht dafür, daß die Erweiterungen der ‚Urversion' des X. Buchs der *Elemente*, zu denen die nach den Sätzen Sätze X.47 und X.84 eingeschobenen Definitionen samt einiger der darin fundierten Sätze gehören, bis auf die Zeit vor der Einführung eines Terminus zur Bezeichnung des ‚Punktes im allgemeinen' zurückgehen. Den damit zusammenhängenden Problemen werde ich in dieser Untersuchung jedoch nicht weiter nachgehen, und auch die Frage, welche der Satzgruppen aus Buch X der *Elemente*, in denen das Wort σημεῖον vorkommt, auf Eudoxos aus Knidos oder Hermotimos aus Kolophon zurückgehen könnten, diskutiere ich hier nicht.

[138] Diese Datierung verdankt man Oskar Becker, Die Lehre vom Geraden und Ungeraden im Neunten Buch der Euklidischen Elemente (Versuch einer Wiederherstellung in der

schließlich in ihre Geometrie einführten, war sicherlich nicht gleich für jeden an der Mathematik interessierten Griechen ersichtlich, daß diese Erweiterung des geometrischen Begriffsapparats nötig und sinnvoll ist. Alle Punkte aus den Sätzen der frühen Geometer sind nämlich markante Stellen an Gebilden, für die seit jeher Eigennamen zur Verfügung standen. Daraus sollte man aber nicht sofort weiter schließen, daß die Griechen also doch ‚schon immer' von Punkten gesprochen haben; denn Termini wie πέρας, κέντρον oder κορυφή können in den fraglichen Sätzen zwanglos als Hinweise darauf verstanden werden, daß die zugehörigen Strecken, Winkel und Dreiecke oder Vielecke in gewissen Bereichen eine qualitative Besonderheit aufweisen, ohne daß diese ‚Bereiche' als solche deshalb auch schon als isolierbare Objekte gedeutet werden müssen, die zum Gegenstand einer besonderen Untersuchung werden können. Das macht erklärlich, warum Platon davon ausging, daß man in der Geometrie ohne den Begriff des Punktes auskommen kann[139], doch das allein erklärt nicht hinlänglich, warum er sich so entschieden gegen diese (letztlich zukunftsträchtige) Neuerung wandte.

Bei meinem Versuch, eine Antwort auf die damit implizit gestellte Frage zu finden, was ihn zu dieser ablehnenden Haltung bewogen haben könnte, gehe ich von dem sogenannten ‚Liniengleichnis' aus der *Politeia* aus[140]. Platon erinnert seine Leser dort daran, daß die Mathematiker zu ihren fachspezifischen Einsichten oft beim Betrachten von sinnlich wahrnehmbaren Figuren kommen, obwohl sie sich mit ihren Sätzen durchaus nicht auf gezeichnete Figuren beziehen, „sondern auf das Quadrat selbst und dessen Diagonale ..., die man nicht anders als mit dem Verstand wahrnehmen kann"[141]. Dabei läßt der Hinweis auf ‚das Quadrat selbst und dessen Diagonale' sofort vermuten, daß Platon seine Ausführungen an Hand des Satzes erläutern wollte, nach dem die Seite und die Diagonale des Quadrats inkommensurabel sind, und dazu paßt nun insbesondere, daß er kurz zuvor „das Gerade und das Ungerade, die [ebenen] Figuren, die drei Arten der Winkel sowie anderes damit Verwandtes"[142] als typische Beispiele für die ὑποθέσεις angeführt hatte, aus denen die Mathematiker ihre Sätze ableiten. Diesen ὑποθέσεις entsprechen in Euklids

ursprünglichen Gestalt), in: Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik. Abt. B: Studien 3, 1936, 533–553; wieder abgedruckt in O. Becker (Hrsg.), Zur Geschichte der griechischen Mathematik, Darmstadt 1965, 125–145.

139 Für die in den *Nomoi* erwähnte Begründung dafür, daß sich Flächen (bzw. Körper) nicht aus Linien (bzw. aus Flächen) zusammenfügen lassen, braucht man den Punktbegriff nicht, denn die zugehörigen Ableitungen lassen sich aus den Definitionen I.2, I.5 und XI.1 fundieren, die von der Def. I.1 (und damit vom Begriff des ‚Punktes im allgemeinen') unabhängig sind.

140 Eine ausführlichere Darstellung der nachfolgend angeführten Deutung der unter dem Namen ‚Liniengleichnis' bekannten Zeilen 509C–511A aus der *Politeia* findet man bei H.-J. Waschkies (wie Anm. 58) 318–326.

141 *Politeia* VI 510D4–511A2.

142 *Politeia* VI 510C.

Elementen nämlich neben den Definitionen VII.6–7, mit denen festgelegt wird, was unter einer geraden bzw. ungeraden Zahl verstanden werden soll, die Folge der Definitionen I.8–22, mit denen zunächst der Begriff des ebenen Winkels mit seinen drei Unterarten des rechten, des spitzen und des stumpfen Winkels eingeführt wird, bevor dann die speziellen ebenen Figuren definiert werden, zu denen insbesondere das dort ganz am Ende beschriebene Quadrat gehört. Nach der Praxis aus Euklids *Elementen* und der aus einer entsprechenden Praxis extrapolierten Wissenschaftstheorie, die Aristoteles in seinen *Analytica Posteriora* vorträgt[143], haben die Definitionen in der Mathematik den Rang von ersten, unbeweisbaren Prinzipien. Außerdem zeigt eine Passage am Anfang des *Menon*, daß die Mathematiker ihre Begriffe zur Zeit der Abfassung dieses Dialogs schon routinemäßig auf eine von Platon als vorbildlich empfundene Weise zu definieren pflegten[144], und wenn man schließlich noch berücksichtigt, daß Aristoteles mit seiner Wissenschaftstheorie nicht zuletzt an Platons *Menon* anknüpft, auf den er gleich zu Beginn der *Zweiten Analytik* expressis verbis verweist[145], folgt insgesamt, daß Platons mathematisches Beispiel aus dem Liniengleichnis vorzüglich gewählt ist. Die Konstruktion des Quadrats, dessen Seite und Diagonale als inkommensurabel erwiesen werden sollen, stützt sich nämlich auf die Definition des rechten Winkels sowie des Quadrats[146], und der Beweis für die Inkommensurabilität des fraglichen Streckenpaares, der von Aristoteles immer wieder mit zum Teil extrem elliptischen Formulierungen als ein Musterbeispiel für das mathematische Denken angeführt wird[147], weil er ihn offensichtlich für allgemein bekannt hielt, setzt voraus, daß man begrifflich zwischen den geraden und den ungeraden Zahlen zu unterscheiden weiß. Dasselbe kann man mutatis mutandis aus Platons sogenannter ‚Schulstunde' im *Menon* erschließen[148]; denn wenn die Leser dieses Dialogs nicht gewußt hätten, daß die Seiten von Quadraten inkommensurabel sind, falls das eine doppelt so groß ist wie das andere, weil die Seite des

[143] Siehe Anm. 104.

[144] Dazu verweise ich ergänzend auf H.-J. Waschkies (wie Anm. 58) 325.

[145] Die einzigen Stellen, an denen Aristoteles ausdrücklich auf Platons *Meno* verweist, findet man nach dem Index Aristotelicus von Hermann Bonitz (454b) in Anal. pr. II 21, 67a21 u. Anal. post. I 1 71a29.

[146] Man beachte, daß Euklid die Konstruktion des Quadrats, in der man vorschnell eine Trivialität sehen könnte, die keiner weiteren Erwähnung bedarf, in seinem Satz I.46 in extenso beschreibt. Dabei geht in die Begründung der Lösung dieses Problems mit den Worten ἤχθω τῇ AB εὐθείᾳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ σημείου τοῦ A πρὸς ὀρθὰς ἡ AΓ der Satz I.11 als Prämisse ein, in dessen Beweis die dort fast wörtlich zitierte Def. I.10, die beschreibt, was ein rechter Winkel ist, als Voraussetzung benutzt wird, und weiter wird dann im Beweis der Aufgabe I.46 von dem dort gleich am Anfang konstruierten Vierseit sukzessiv gezeigt, daß es gleichseitig sowie rechtwinklig ist und somit nach der Def. I.22 ein Quadrat sein muß.

[147] Eine Liste mit 29 Stellen aus dem Corpus Aristotelicum, an denen darauf angespielt wird, daß die Seite und die Diagonale aus ein- und demselben Quadrat inkommensurabel sind, hat S. Maracchia zusammengestellt (Aristotele e l'incommensurabilità, in: AHES 21, 1980, 201–228).

[148] Siehe Anm. 5.

einen dann gerade mit der Diagonalen des anderen gleich ist, fehlt Platons Beispiel die Pointe, und damit dürfte hinlänglich klar sein, daß Platon in der deduktiven Begründung dafür, daß die Seite und die Diagonale in ein- und demselben Quadrat inkommensurabel sind, schon ebenso wie Aristoteles ein Beispiel par excellence für das Vorgehen der Mathematiker gesehen hat[149]. Dabei fällt auf, daß Platon deren Beweisprinzipien im Liniengleichnis als ὑποθέσεις bezeichnet hat. Meiner Ansicht nach wollte er sie auf diese Weise plakativ gegen das von ihm dort als ἀνυπόθετον bezeichnete höchste Prinzip seiner eigenen philosophischen Lehre absetzen, bei dem es sich genauer um die Idee des Guten handelt[150]. Dabei ist nämlich zu beachten, daß der Terminus ἀνυπόθετον vor Platon nicht belegt ist und bei ihm nur im Liniengleichnis vorkommt[151]. Bei dem Wort ἀνυπόθετον handelt es sich demnach um einen von Platon ad hoc geprägten Kunstausdruck[152], und daraus schließe ich nun weiter, daß er mit der Bezeichnung der von den Mathematikern seiner Zeit als Beweisprinzipien benutzten Definitionen, die bei Aristoteles ὅροι heißen[153], als ὑποθέσεις exemplarisch sagen wollte, daß die Prinzipien aller Fachwissenschaften im Vergleich mit dem höchsten Prinzip seiner eigenen Ideenlehre unbegründete Annahmen sind, die erst noch in jenem ἀνυπόθετον zu fundieren wären. Dagegen will Platon die fraglichen Prinzipien der Mathematik damit ganz sicher nicht für falsch erklären. Seiner Ansicht nach müssen sie allerdings erst noch kraft einer Schau des

149 Einen Beweis für die Inkommensurabilität der Seite und der Diagonale aus ein- und demselben Quadrat, der insbesondere voraussetzt, daß man mit den Definitionen der geraden und ungeraden Zahlen vertraut ist, hat Euklid in zwei Versionen als Anhang in das X. Buch der *Elemente* aufgenommen (Elem. X, Appendix 27).

150 Wie aus dem Satz αὐτὸ μὲν τί ποτ᾽ ἐστὶ τἀγαθὸν ἐάσωμεν τὸ νῦν εἶναι (506D–E) hervorgeht, wirbt Platon mit den darauf folgenden drei Bildern, die unter den Namen Sonnengleichnis, Liniengleichnis und Höhlengleichnis bekannt sind, bei seinen Lesern um ein Vorverständnis für seine Idee des Guten.

151 *Politeia* 510B u. 511B.

152 Das Wort ἀνυπόθετον ist danach in einer Passage aus der *Metaphysik* (IV 3, 1005b14) belegbar, in der Aristoteles die erkenntnistheoretischen Betrachtungen aus dem Liniengleichnis dadurch fortführt (s. W.D. Ross [wie Anm. 16] I, 263), daß er die Idee des Guten durch den dort als das ἀνυπόθετον bezeichneten und zum obersten Prinzip aller Wissenschaften erklärten Satz vom Widerspruch ersetzt. Außerdem findet man es bei dem von Platon (und Aristoteles) abhängigen Proklos (wie Anm. 113) 11.9, 31.13, 32.15–16 u. 75.9, der im Kontext der drei zuerst genannten Stellen das Liniengleichnis aus der *Politeia* kommentiert, auf das er auch in den Zeilen 75.7–10 anspielt, und schließlich läßt es sich der Terminus ἀνυπόθετον noch in einem Anhang zu den Definitionen aus der *Geometria* des Hero Alexandrinus belegen (wie Anm. 80) 126.18–128.5, der nach Ansicht des Herausgebers J.L. Heiberg ein Exzerpt aus dem Euklid-Kommentar des Proklos (bzw. aus einer daraus exzerpierten Sammlung von Scholien) ist (wie Anm. 80, IV), das ein Byzantiner im XI. Jahrhundert an die Definitionen aus Heros *Geometria* angefügt hat.

153 Die Liste mit den Definitionen, die den Satzsystemen aus den Büchern I, II, III, IV, V, VI, VII, X u. XI der *Elemente* vorangestellt sind, trugen bei Euklid selbst noch nicht den Titel ὅροι. Diese Überschrift geht auf einen spätantiken (oder gar erst byzantinischen) Kopisten der Euklid-Handschriften zurück, der sich dabei vermutlich an der Wissenschaftstheorie des Aristoteles orientiert hat; s. H.-J. Waschkies (wie Anm. 1) 105–111.

ἀνυπόθετον in den Rang eines unerschütterlichen Wissens erhoben werden, das ihnen die erfolgreiche Anwendung beim Ableiten von Fachwissen allein nie geben kann[154].

Konrad Gaiser hat in einem Kommentar zu einer Reihe von Platon-Stellen, zu denen auch die Zeilen 510B–511D aus dem Liniengleichnis gehören, darauf hingewiesen, daß ein entscheidend wichtiges philosophisches Problem in der Frage liegt, wie die von Platon als ὑποθέσεις bezeichneten Prinzipien „ihrerseits ontologisch überprüft und mit unmittelbarer Sicherheit erkannt werden können“[155]. Wie berechtigt die Frage ist, erkennt man sofort, wenn man bedenkt, daß Aristoteles die erkenntnistheoretischen Betrachtungen aus dem Liniengleichnis im IV. Buch seiner *Metaphysik* dadurch weiterzuführen versucht, daß er die Idee des Guten durch den von ihm dort als das ἀνυπόθετον bezeichneten und zum obersten Prinzip aller Wissenschaften erklärten Satz vom Widerspruch ersetzt[156]. Aristoteles schrieb dem Satz vom Widerspruch in seiner Erkenntnistheorie also denselben Rang zu, den Platon dem ἀνυπόθετον aus dem Liniengleichnis zugesprochen hatte, und in der Tat ist der Satz vom Widerspruch das erste Prinzip aller logisch-deduktiv begründeten Wissenschaften, weil ohne ihn in jeder solchen Theorie auch widersprüchliche Aussagen und damit letztlich jede beliebige These vertretbar wäre. Der universellen Gültigkeit dieses aristotelischen ἀνυπόθετον entspricht andererseits, daß es von sich aus keine Theorie inhaltlich festlegt. Das kann im Falle des platonischen ἀνυπόθετον nicht anders gewesen sein, und daher mußte es für Platon nahe liegen, Brücken zu finden, die von seiner alle fachspezifischen Prinzipien bestätigenden Idee des Guten zu diesen hinabführen. Ein Hinweis darauf, daß man in der Akademie in der Tat nach solchen Zwischenstufen suchte, bietet die oben angeführte Stelle aus dem I. Buch der *Metaphysik*, denn dort erklärt Aristoteles:

„Da wir die Wesen aber auf Prinzipien zurückführen wollen, setzen wir [fest], daß Längen aus Kurzem und Langem [sind, also] aus etwas Kleinem und Großem (μεγάλον καὶ μικρόν), außerdem [soll] eine Fläche aus Breitem und Schmalem, ein Körper dagegen aus Tiefem und Flachem [sein]“[157]

Danach hat man im Kreis um Platon zwischen dem ἀνυπόθετον als dem Prinzip alles gesicherten Wissens und den Prinzipien der Fachwissenschaftler als ein immer noch sehr allgemeines und hochrangiges Prinzip das μέγα (bzw. μεγάλον) καὶ μικρόν eingeschoben, unter dem dann die Begriffpaare βραχὺ καὶ μακρόν, πλάτος καὶ στενόν sowie βάθος καὶ ταπεινόν als erste fachspezifische Prinzipien angesiedelt waren, und wie der Übergang von diesen Prinzipien des spezifisch Un-

[154] Diese Deutung läßt sich insbesondere durch einen Vergleich der Zeilen 511C3–D6 aus dem Liniengleichnis mit der in der *Politeia* wenig später folgenden Passage 533B–C weiter absichern.

[155] Konrad Gaiser (wie Anm. 40) 468.

[156] Siehe Anm. 152.

[157] Siehe Anm. 33.

bestimmten zu den Lehren der Mathematiker erfolgen sollte, zeigt eine ebenfalls schon angeführte Stelle aus der *Metaphysik*, an der Aristoteles erklärt:
„Ein Quantum nun ist eine Menge, wenn es abzählbar ist, eine Größe ist es jedoch, wenn es meßbar ist. ... Von diesen [Quanta] ist die begrenzte Menge eine Zahl, die [begrenzte] Länge aber eine Linie, die [begrenzte] Breite dagegen eine Fläche, die [begrenzte] Tiefe schließlich ein Körper"[158].

Bei der Deutung dieser Textstelle gehe ich von den nachstehend angeführten Begriffsbestimmungen aus Euklids *Elementen* aus, auf die Aristoteles in der *Topik* anspielt[159], und die somit auch schon zur Zeit von Platon bekannt waren:

Def. I 3: Grenzen einer Linie aber sind Punkte.
Def. I 6: Grenzen einer Fläche dagegen sind Linien.
Def. XI 2: Grenze aber eines Körpers ist eine Fläche.

In diese Definitionen geht nicht ein, was durch die Punkte bzw. Linien oder Flächen abgegrenzt wird, wenn daraus Linien, Flächen oder Körper entstehen sollen. Die Definitionen I.2, I.5 und XI.1, die ich weiter oben ausführlich diskutiert habe, legen jedoch nahe, daß die fraglichen Gebilde durch ein Begrenzen der an sich unbestimmten ‚Länge' bzw. ‚Breite' oder ‚Tiefe' entstehen, auf die in den soeben genannten Definitionen mit undefinierten Begriffen verwiesen wird. Nach der eben zitierten Passage aus der *Metaphysik* ist man in der Akademie offenbar von der Vorstellung, die den Definitionen I 3, I 6 und XI 2 zugrunde liegt, mit einem Blick auf die Definitionen I.2, I.5 und XI.1 eine Stufe weiter zum Allgemeineren hin aufgestiegen, in dem man von den bei den Mathematikern undefiniert gelassenen Termini Länge, Breite und Tiefe zu den noch unbestimmteren Begriffspaaren βραχὺ καὶ μακρόν, πλάτος καὶ στενόν und βάθος καὶ ταπεινόν überging, die ihrerseits (wie das πολὺ καὶ ὀλίγον, aus dem die Zahlen hervorgehen sollten[160]), als Spezialfälle des noch allgemeineren Begriffspaars μέγα καὶ μικρόν aufgefaßt werden konnten. Wie man sich leicht klar macht, ist der Punkt ein geometrisches Objekt, das nicht zu diesem Begründungsschema paßt, weil es bei ihnen keinen Spielraum hinsichtlich der Bestimmtheit gibt, den ein begrenzendes Prinzip einschränken kann; denn während es bei Linien, Flächen und Körpern sinnvoll ist, davon zu sprechen, daß sie durch die Eingrenzung eines an sich unbestimmten Stoffes entstehen, den sie danach ‚im Inneren' enthalten[161], fehlt den Punkten jeder Inhalt dieser Art, und daher

[158] Siehe Anm. 108.

[159] Εἰσὶ δὲ τῶν τοιούτων ὁρισμῶν ὅ τε τῆς στιγμῆς καὶ ὁ τῆς γραμμῆς καὶ ὁ τοῦ ἐπιπέδου· πάντες γὰρ διὰ τῶν ὑστέρων τὰ πρότερα δηλοῦσιν· τὸ μὲν γὰρ γραμμῆς, τὸ δ' ἐπιπέδου, τὸ δὲ στερεοῦ φασι πέρας εἶναι, *Topik* VI 4 141b19–22; dazu verweise ich ergänzend auf H.-J. Waschkies (wie Anm. 32) 300–305.

[160] Zu diesem Detail der akademischen Prinzipienlehre gibt es bei Euklid keine Parallelstelle.

[161] Dem entsprechen die Ausführungen von Aristoteles im IV. Buch der *Physik* (2, 209b6–11), nach denen der Stoff das von der Form Umfaßte und Begrenzte ist; denn Aristoteles erläutert dieses Detail seiner Lehre von der ὕλη mit einem Hinweis darauf, daß der Stoff zurückbleiben würde, wenn man von einer Kugel die sie begrenzende Fläche fortnähme.

vermute ich, daß Platon sich gegen die Aufnahme der Punkte in den Objektbereich der Geometer wandte, weil er im Rahmen seiner Metatheorie der Mathematik nicht ableitbar ist. Wie ich oben erläuterte, war das während einer gewissen Übergangszeit nicht so abwegig, wie es heute scheinen mag, doch wie die Werke der griechischen Mathematiker zeigen, hat die weitere Entwicklung der Geometrie einen anderen Verlauf genommen als Platon vermutete.

Ich wollte mit meinen voranstehenden Ausführungen exemplarisch zeigen, daß die Auswertung der mathematisch interessanten Stellen aus den Schriften von Platon und anderen Autoren, die seine metatheoretischen Ausführungen zur Mathematik kommentiert oder weiter fortgeführt haben, eine lohnende Aufgabe ist. Im Detail bietet die Lösung der damit verbundenen Probleme große Schwierigkeit; aber andererseits wird die Arbeit daran sicher zu Ergebnissen führen, die nicht nur für die Vorgeschichte der Mathematik aus Euklids *Elementen*, sondern auch für die Platon- und Aristotelesforschung von Interesse sind.

Kiel Hans-Joachim Waschkies