MATHEMATISCHES BEI PLATON

Über die Mathematik der Griechen sind wir im wesentlichen durch die überlieferten Werke von Archimedes, Euklid, Apollonios aus Perga, Pappos aus Alexandria und Diophant informiert. Die chronologisch frühsten unter diesen fünf Autoren sind Archimedes und Euklid, deren Tätigkeit als Mathematiker in die drei letzten Viertel des 3. Jh. v.Chr. fallen dürfte[1]; aber wie schon eine kurze Analyse ihrer Schriften ahnen läßt, markieren die von ihnen zusammengestellten Satzsysteme den Abschluß einer längeren Entwicklung, deren Erforschung seit dem Erscheinen von Carl Anton Bretschneiders richtungweisender Monographie über *Die Geometrie und die Geometer vor Euklides* im Jahre 1870[2] das zentrale Anliegen aller Mathematikhistoriker geblieben ist, die sich mit der Antike befaßt haben. Die Lösung der damit formulierten Aufgabe gelang bislang allenfalls partiell; denn es gibt kaum Quellen, die von den frühen Phasen des Prozesses berichten, in dessen Verlauf die Mathematik der Griechen schließlich Gestalt annahm, und außerdem bereitet die Interpretation der fraglichen Texte, die ich in Anlehnung an einen Vorschlag von Michel Federspiel zwei Gruppen zuweise[3], zumeist große Schwierigkeiten.

Besonders wichtige Quellen sind *mathematische* oder *allgemein wissenschaftliche Texte*, aus denen nicht nur hervorgeht, daß dem betreffenden Autor ein bestimmter mathematisch bzw. wissenschaftlich relevanter Sachverhalt bekannt war, sondern auch, wie das zugehörige Wissen zu seiner Zeit begründet wurde bzw. wie man das zugehörige Problem damals gelöst hat.

Quellen dieser Art lassen einen direkten Schluß auf die Mathematik der Zeit ihrer Autoren zu, und außerdem können sie als ein verläßlicher Terminus ad quem für die Datierung von Parallelstellen in Euklids *Elementen* oder in den Schriften anderer Mathematiker dienen, falls solche Parallelen vorhanden sind. Dazu sei schon hier darauf hingewiesen, daß bei der Interpretation von wissenschaftlichen oder auch nur wissenschaftsgeschichtlich interessanten Texten stets die Regel zu beach-

[1] Siehe Ivo Schneider, Archimedes. Ingenieur, Naturwissenschaftler und Mathematiker, Darmstadt 1979, 47–48 und 61–62, sowie H.-J. Waschkies, Die Prinzipien der griechischen Mathematik: Platon, Aristoteles, Proklos und Euklids Elemente, in: Döring, Klaus, Bernhard Herzhoff und Georg Wöhrle (Hrsgg.), Antike Naturwissenschaft und ihre Rezeption V, Trier 1995, 91–153, dort 98–100.

[2] Carl Anton Bretschneider, Geometrie und die Geometer vor Euklides, Leipzig 1870, ND 1981.

[3] Michel Federspiel, Sur l'origine du mot σημεῖον en géométrie, in: REG 105, 1992, 385–405, dort 398.

ten ist, nach der alle Quellen, die in eine historische Rekonstruktion eingehen, primär in der chronologischen Reihenfolge der Autoren analysiert werden sollten, von denen diese Texte geschrieben sind und nicht in der Reihenfolge der Wissenschaftler, die in diesen Texten zitiert oder gar nur erwähnt werden; denn andernfalls läuft man Gefahr, die Rekonstruktionsversuche eines antiken Autors mit historischen Interessen für verläßliche Berichte über eine Zeit zu halten, von der er selber auch schon keine verläßlichen Nachrichten mehr hatte[4].

Wenn man sich von dieser methodischen Vorsicht leiten läßt, stellt man schnell fest, daß mathematische und astronomische Texte aus der Zeit vor Archimedes und Euklid zu den *rarissima* zählen. Der älteste ist die sogenannte Schulstunde aus Platons *Menon*[5], danach kommt das Prooemium zu dessen *Theaetet*[6], dann eine längere Passage aus der *Meteorologie* des Aristoteles[7], danach die mathematischen Stellen aus der zum *Corpus Aristotelicum* gezählten Schrift Περὶ ἀτόμων γραμμῶν[8], und schließlich sind noch die beiden kleinen Schriften *De sphaera quae movetur liber* und *De ortibus et occasibus libri duo* des Autolykos aus Pitane[9] zu nennen. Mehr mathematische Texte, deren Autoren aus der Zeit vor 300 v.Chr. stammen, gibt es meines Wissens nicht[10].

[4] Siehe Detlev Fehling, Materie und Weltbau in der Zeit der frühen Vorsokratiker. Wirklichkeit und Tradition (Innsbrucker Beiträge zur Kulturwissenschaft, Sonderheft 89), Innsbruck 1994, 7.

[5] *Menon*, 82b–85b; Textstellen aus dem *Corpus Platonicum* zitiere ich durchgängig nach der von J. Burnet besorgten Ausgabe der Opera. I–V, Oxford 1899–1906 [seither mehrfach nachgedruckt].

[6] *Theaetet*, 147d4–148b3.

[7] Aristoteles, *Meteorologie*, III 5, 375b16–377a28 (Aristoteles, Meteorologicorum libri quattuor. Recensuit indicem verborum addidit F.H. Fobes, Cambridge (Mass.) 1919 [ND Hildesheim 1967]).

[8] [Pseudo-]Aristoteles, Aristotelis quae feruntur De plantis, De mirabilibus auscultationibus, Mechanica, De lineis insecabilibus, Ventorum situs et nomina, De Melisso, Xenophane, Gorgia. Edidit Otto Apelt, Leipzig 1888.

[9] Autolykos aus Pitane, *La sphère en mouvement. Levers et couchers héliaques*. Testimonia. Texte établi et traduit par Germaine Aujac avec la collaboration de Jean-Pierre Brunet et Robert Nadal, Paris 1979.

[10] Das umfangreiche ‚Möndchenfragment' des Hippokrates aus Chios (s. Ferdinand Rudio, Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates. Griechisch und deutsch mit einem historischen Erläuterungsberichte als Einleitung. Im Anhange ergänzende Urkunden, verbunden durch eine Übersicht über die Geschichte des Problems von der Kreisquadratur vor Euklid, Leipzig 1907 [ND 1968]), dessen Wirken auf die Zeit um 430 v.Chr. datiert werden kann (Axel Anthon Björnbo, Hippokrates aus Chios, RE 16. Halbband [1913] 1780–1801, dort 1781, und Walter Burkert, Weisheit und Wissenschaft. Studien zu Pythagoras, Philolaos und Platon, Nürnberg 1962, 291), ist nach den oben angegebenen Kriterien eine späte Quelle, deren Überlieferungswert nicht diskussionslos als gegeben betrachtet werden darf, weil sie nur in einem Kommentar zur Physik des Aristoteles erhalten ist, den Simplikios bald nach 533 n.Chr. schrieb (F. Rudio [wie oben] 6–9).

Quellen von mathematikgeschichtlichem oder allgemeiner von *wissenschaftsgeschichtlichem Interesse* sind dagegen Stellen, denen sich entnehmen läßt, daß der betreffende Autor von irgendeinem für die Mathematik bzw. für die Wissenschaften seiner Zeit relevanten Sachverhalt wußte[11], wobei das einzige Indiz dafür sein kann, daß er einen Terminus der Fachwissenschaftler benutzt. Die Bedeutung dieser Texte als Quellen für die Geschichte der Mathematik und Astronomie, mit der ich mich im folgenden befassen werde, würde man häufig übersehen, wenn es zu ihnen keine Parallelen in den Schriften der Mathematiker und Astronomen gäbe, ohne die sie andererseits oft kaum adäquat zu deuten wären.

Die Autoren, in deren Werken man besonders viele mathematikgeschichtlich interessante Stellen findet, die uns einen Einblick in die Vorgeschichte der Mathematik aus Euklids *Elementen* geben, sind Platon und Aristoteles. Dabei sind die Schriften von Aristoteles in dieser Hinsicht durch die Euklid-Herausgeber Johan Ludvig Heiberg und Thomas Little Heath schon recht gut erschlossen[12]; während es bislang an einer Stellensammlung fehlt, in der die wissenschaftsgeschichtlich interessanten Passagen aus dem *Corpus Platonicum* auch nur einigermaßen vollständig zusammengestellt sind[13]. Im folgenden will ich exemplarisch erläutern, daß die Sammlung und Auswertung der wissenschaftsgeschichtlich interessanten Stellen aus dem *Corpus Platonicum* sowie deren Vergleich mit Textstellen bei Autoren wie Aristoteles, die von Platons Bemühungen um die Wissenschaften seiner Zeit berichten, eine lohnende Aufgabe ist.

Als erstes Beispiel für eine mathematikgeschichtlich interessante Stelle aus dem *Corpus Platonicum*, die auf den ersten Blick ganz unauffällig wirkt, wähle ich die Zeilen 614a5–6 aus dem X. Buch der *Politeia*. Nachdem Platon dort zunächst von den Belohnungen gesprochen hatte, die dem Gerechten auf Erden zu Teil werden, versichert er, sie seien „sowohl der Menge (πλῆθος) als auch der Größe (μέγεθος) nach nichts im Vergleich mit jenen"[14] Belohnungen, die den Gerechten nach dem Tod erwarten. Diesen Zeilen und ihrem Kontext sieht man nicht gleich an, daß sie eine mathematikgeschichtlich interessante Information enthalten; aber

[11] M. Federspiel bezeichnet die fraglichen Textgruppen als *textes mathématiques* und *textes paramathématiques* (wie Anm. 3) 398. Da das Adjektiv *paramathematisch* im Deutschen assoziativ an das Wort *parapsychologisch* denken läßt, das ausschließlich in pseudowissenschaftlichen Kontexten verwendet wird, gebe ich Ferderspiels Terminus *paramathématique* sinngemäß mit *mathematikgeschichtlich interessant* (und nicht mit paramathematisch) wieder.

[12] Johan Ludvig Heiberg, Mathematisches zu Aristoteles, in: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften 18, 1904, 3–49, und Thomas Little Heath, Mathematics in Aristotle, Oxford 1949 (ND 1970).

[13] Die mathematischen Stellen aus Platons Schriften sind zusammen mit etwa 100 mathematikgeschichtlich interessanten Stellen, deren Übersetzung und Deutung schwierig oder gar umstritten ist, von Attilio Frajese ins Italienische übersetzt und kommentiert worden (Platone e la matematica nel mondo antico, Rom 1963, 59–199).

[14] οὐδέν ἐστι πλήθει οὐδὲ μεγέθει πρὸς ἐκεῖνα, *Politeia* X 614a5–6.

wie ein Vergleich mit Euklids *Elementen* zeigt, sind sie (samt der ebenso unauffälligen Parallelstellen im *Phaidon*, im *Parmenides* und im *Charmides*)[15] für die Rekonstruktion der Vorgeschichte von Euklids *Elementen* wichtig. Die zunächst eher pleonastisch wirkende Formulierung ‚sowohl der Menge als auch der Größe nach' darf nämlich als ein gutes Indiz dafür gelten, daß die griechischen Mathematiker die Worte πλῆθος und μέγεθος schon zur Zeit Platons (und nicht erst seit der Zeit des Aristoteles) terminologisch unterschieden haben. Bei Aristoteles und in Euklids *Elementen* bezeichnet der (bei diesen Autoren nirgends definierte) Fachausdruck μέγεθος nämlich übergreifend und unspezifisch die Linien, die Flächen und die Körper, während sie zur Bezeichnung von diskreten und damit abzählbaren Mengen stets das Wort πλῆθος benutzen[16].

Nach zwei voneinander abhängigen Euklid-Scholien aus der Spätantike, deren Überlieferungswert unüberprüfbar ist, soll die allgemeine Proportionentheorie aus dem V. Buch der *Elemente*, in der im Unterschied zu der zahlentheoretischen Proportionentheorie aus den Büchern VII–IX nicht nur Verhältnisse zwischen den als πλῆθα μονάδων[17] bezeichneten Zahlen, die stets kommensurabel sind, sondern auch zwischen inkommensurablen Größenpaaren miteinander verglichen werden können, auf Eudoxos aus Knidos zurückgehen[18]. Andererseits konnte Oskar Becker 1933 an Hand einer Stelle aus der *Topik*[19] des Aristoteles[20] eine ältere, heute zumeist als anthyphairetisch bezeichnete Proportionenlehre rekonstruieren, in der es ebenfalls schon um den Vergleich von Verhältnissen zwischen Größen ging, die in-

[15] Siehe *Phaidon* 100e–101b, *Parmenides* 151d–e, und *Charmides* 168e; als weiterer Beleg für die bewußte Benutzung des Begriffspaars μέγεθος und πλῆθος zur Unterscheidung von ausgedehnten und diskreten Größen aus der Zeit Platons kann gelten, daß Xenophon in seinen *Memorabilien* erklärt (Erinnerungen an Sokrates. Griechisch-deutsch. Ed. Peter Jaerisch, München 1962, I. IV 8), die Himmelskörper seien ὑπερμεγέθη καὶ πλῆθος ἄπειρα.

[16] Im 13. Kapitel aus dem V. Buch der *Metaphysik* zählt Aristoteles eingangs nur die abzählbaren Mengen (πλῆθος) und die Größen (μέγεθος) zu den Quantitäten (ποσόν ἀριθμητόν bzw. μετρητόν), bevor er gegen Ende des Kapitels einräumt, daß die Zeit (χρόνος) und die Prozesse (κίνησις) zumindest akzidentell unter die Kategorie des ποσόν fallen (Aristoteles, Metaphysics, Vol. I–II. A revised Text with Introduction and Commentary by W.D. Ross [Oxford 1966; [1]1924], 1020a7–32). Als Beispiel für einen mathematischen Text, in dem ausdrücklich zwischen den Zahlen als diskreten Mengen (πλῆθος) und kontinuierlich ausgedehnten Größen (μέγεθος) unterschieden wird, nenne ich noch Euklids Def. XI.10: „Gleiche und ähnliche körperliche Figuren sind jedoch (diejenigen), die von ähnlichen Flächen umfaßt werden, die hinsichtlich ihrer Menge und Größe gleich sind (ἴσα τῷ πλήθει καὶ τῷ μεγέθει)." Textstellen aus Euklids *Elementen* und den zugehörigen Scholien zitiere ich wie üblich nach der folgenden Ausgabe der Elementa, Vol. I–V, post I.L. Heiberg edidit E.S. Stamatis, Leipzig 1969–1977; revidierter Nachdruck von [1]1883–1888.

[17] Euklid, *Elem.*, Def. VII.2: Eine Zahl ist die aus Einheiten zusammengefügte Menge.

[18] Anonymus, Scholien V.1 und V.3 zu Euklids *Elementen* (wie Anm. 16).

[19] Aristoteles, *Topica cum libro de Sophisticis elenchis*. E schedis Ioannis Strache edidit Maximilianus Wallies, Leipzig 1923, VIII 3, 158b29–35.

[20] Oskar Becker, Eudoxos - Studie. I: Eine voreudoxische Proportionenlehre und ihre Spuren bei Aristoteles und Euklid, in: Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Abt. B: Studien, Bd. 2 (1933) 311–333.

kommensurabel sein können. Ursprünglich glaubte man allerdings, daß sich mit dieser Lehre nicht alle Volumensätze aus dem XII. Buch der *Elemente* beweisen lassen, die auf Eudoxos aus Knidos zurückgehen[21], und daraus schloß man weiter, daß Eudoxos die anthyphairetische Proportionenlehre im Rahmen der Ausarbeitung seiner Theorie der Volumenbestimmung durch eine leistungsfähigere Proportionentheorie ersetzt hat. Die Analyse der Begründungsmethoden aus den Schriften des Archimedes durch Wilbur Richard Knorr hatte allerdings schon 1978 ergeben[22], daß Archimedes in seinen Beweisen nicht die Lehre aus dem V. Buch der *Elemente* voraussetzt, sondern statt dessen auf die anthyphairetische Proportionentheorie zurückgreift. Inzwischen haben Mogens Esrom Larsen[23] und Anders Thorup[24] außerdem nachweisen können, daß sich alle Sätze aus dem V. Buch der *Elemente* sehr wohl anthypairetisch begründen lassen. Dazu war bereits 1979 von Ivo Schneider darauf hingewiesen worden, daß sich die übliche Datierung, nach der Euklid vor Archimedes lebte bzw. schrieb, durch keine zuverlässige Quelle belegen läßt[25], und wie mir scheint, sprechen die eben angeführten Indizien in der Tat dafür, daß Euklids V. Buch nacharchimedisch ist und somit von ihm selbst stammen dürfte. Diese Datierung induziert die Frage, ob man Eudoxos aus Knidos statt der Proportionenlehre aus dem V. Buch der *Elemente* die anthypairetische Proportionentheorie zuschreiben darf. Einen Ansatz für deren Beantwortung bietet die Beobachtung von O. Becker, nach der Euklid den Terminus μέγεθος in den *Elementen* fast nur im Zusammenhang mit seiner allgemeinen Proportionentheorie und deren (direkten oder indirekten) Anwendung benutzt[26]. Daraus wird man in Anlehnung an Becker schließen dürfen, daß der Terminus μέγεθος zusammen mit der ersten allgemeinen Proportionentheorie, die sich sowohl auf kommensurable als auch auf inkommensurable Größen anwenden läßt, als Fachwort in die Mathematik der Griechen eingeführt worden ist. Dabei ließ Becker offen, ob das schon durch Eudoxos aus Knidos geschah (dem er die Lehre aus dem V. Buch der *Elemente* mit dem Anonymus der Euklid-Scholien zuschrieb), oder ob erst spätere Überarbeiter wie Theudios aus

[21] Einen Abdruck der Stellen bei Archimedes und Heron, an denen Eudoxos aus Knidos zugeschrieben wird, als erster einen korrekten Beweis für die Theoreme XII.2, XII.7, XII.10 und XII.18 aus Euklids *Elementen* gefunden zu haben, findet man in der Sammlung: Die Fragmente des Eudoxos von Knidos. Herausgegeben, übersetzt und kommentiert von F. Lasserre, Berlin 1966, Fragment D 59–62 (S. 30–35).

[22] Wilbur Richard Knorr, Archimedes and the pre – Euclidean Proportion Theory, in: AIHS 28, 1978, 183–244.

[23] Mogens Esrom Larsen, On the Possibility of a pre – Euclidean Theory of Proportions, in: Centaurus 27, 1984, 1–25.

[24] Anders Thorup, A pre – Euclidean Theory of Proportions, in: AHES 45, 1992, 1–16.

[25] Ivo Schneider (wie Anm. 1) 47–48 und 61–62; dazu verweise ich ergänzend auf Johannes Hjelmslev, Eudoxus' Axiom and Archimedes' Lemma, in: Centaurus 1, 1950, 2–11, dort 6, sowie auf H.-J. Waschkies (wie Anm. 1) 98–100.

[26] O. Becker (wie Anm. 20) 326.

Magnesia, Hermotimos aus Kolophon „oder gar erst Euklid selbst den Terminus μέγεθος in die Aussagen der neuen [Proportionen-]Theorie einführten [und Eudoxos] selbst sich noch mit der unbestimmteren Ausdrucksweise des ‚absoluten' Artikels ‚τό …, τά …', wie sie Euklid [sogar noch in] manchen Theoremen des V. Buches[27] erhalten hat, begnügte"[28].

Da der Begriff μέγεθος als Bezeichnung für etwas Quantifizierbares nicht erst bei Aristoteles[29], sondern vom *Phaidon* an bei Platon von dem Begriff πλῆθος unterschieden wird[30], halte ich die Zuschreibung des mathematischen Terminus μέγεθος an einen so späten Mathematiker wie Euklid für unvertretbar, doch daraus folgt noch nicht gleich weiter, daß er von Eudoxos stammt; denn das Fachwort μέγεθος könnte auch von einem uns namentlich gar nicht bekannten Mathematiker in die griechische Mathematik eingeführt worden sein. Das müßte insbesondere dann in Erwägung gezogen werden, wenn die Abfassung des *Phaidon* und der *Politeia* auf die Zeit vor 370 v.Chr. zu datieren ist[31]. Die mathematischen und astronomischen Entdeckungen des um 391/390 v.Chr. in Knidos geborenen Eudoxos fielen wahrscheinlich erst in die Zeit nach seiner ersten Athenreise, die er um 369|368 v.Chr. antrat[32], und damit dürfte klar sein, daß die Auswertung der mathematik- und astronomiegeschichtlich interessanten Stellen aus dem *Corpus Platonicum* noch zur Revision vieler Details des Bildes führen wird, das man sich heute von der Genese der spezifisch griechischen Mathematik macht.

Mein nächstes Beispiel für die Schwierigkeiten, denen man bei der Deutung von mathematikgeschichtlich interessanten Stellen gegenübersteht, die sich auf Platon beziehen, beginne ich mit dem Zitat einer Passage aus dem I. Buch der *Metaphysik* des Aristoteles, nach der Platon ein Anhänger der Lehre von den unteilbaren Linien war. Dort heißt es:

„Da wir die Wesen aber auf Prinzipien zurückführen wollen, setzen wir [fest], daß Längen aus Kurzem und Langem [sind, also] aus etwas Kleinem und Großem, außerdem [soll] eine Fläche aus Breitem und Schmalem, ein Körper dagegen aus Tiefem und Flachem [sein]. Indessen, wie wird die Fläche [dann] eine Linie oder der Körper eine Linie und eine Fläche enthalten? Das Breite und Schmale sind nämlich eine andere Gattung [des Stofflichen] als Tiefes und Flaches. So wie in ihnen nun auch keine Zahl vorkommt, weil das Viele und Wenige etwas anderes als diese

[27] O. Becker verweist dabei auf die Sätze V.2–4 aus dem V. Buch der *Elemente* (wie Anm. 20) 328.

[28] O. Becker (wie Anm. 20) 328.

[29] Siehe Anm. 16.

[30] Siehe Anm. 14–15.

[31] Diese Datierung wird von H. Schmitz vertreten (Hermann Schmitz, Die Ideenlehre des Aristoteles I, Teil 1: Aristoteles. Kommentar zum 7. Buch der Metaphysik I, Teil 2: Aristoteles. Ontologie, Noologie, Theologie II: Platon und Aristoteles, Bonn 1985, II, 15).

[32] Dazu verweise ich auf H.-J. Waschkies, Von Eudoxos zu Aristoteles. Das Fortwirken der Eudoxischen Proportionentheorie in der Aristotelischen Lehre vom Kontinuum, Amsterdam 1977, 34–58.

[eben genannten Gattungen des Stofflichen sind], ist klar, daß auch kein anderes der höher[-rangigen Wesen] in den nieder[-rangigen] vorkommen wird. Das Breite ist aber auch keine Gattung des Tiefen; denn [andernfalls] wäre der Körper eine Fläche.

Ferner [ist dann zu fragen], woraus die Punkte [sind], die [doch wohl] darin vorkommen werden. Diese Gattung [der geometrischen Objekte] bekämpfte Platon nun [allerdings] als eine [bloß] geometrische Schulweisheit. Als Anfang einer Linie bezeichnete er statt dessen die unteilbaren Linien, und das setzte er [sogar] häufig fest. [Als Linien] müssen diese [unteilbaren Linien] jedoch notwendigerweise irgendeine Grenze haben: daher [folgt] aus dem Argument, nach dem es eine Linie gibt auch, daß es auch einen Punkt gibt."[33]

Die Interpreten dieser Textstelle, die schon häufig kommentiert worden ist, zerfallen in zwei Gruppen. Wie der Verfasser der Schrift Περὶ ἀτόμων γραμμῶν, die zum *Corpus Aristotelicum* gezählt wird, an Hand einer Reihe von Beispielen zeigt, ist die Annahme, nach der es unteilbare Linien geben soll, nicht mit den Lehren der Geometer vereinbar, falls man die unteilbaren Linien als eine Teilmenge der geometrischen Objekte betrachtet, die von den Mathematikern als Linien bezeichnet werden. So läßt sich beispielsweise aus drei unteilbaren Linien, unter denen der Autor der *Linienschrift* wie alle Kommentatoren, die sich zur Lehre von den unteilbaren Linien geäußert haben, atomare Strecken von durchweg gleicher Länge versteht, nach Euklids Satz I.1 ein gleichseitiges Dreieck konstruieren, und der Satz I.10 aus den *Elementen* lehrt danach weiter, daß man jede Seite dieses Dreiecks halbieren kann, indem man auf sie von der Ecke, die ihr gegenüberliegt, das Lot fällt[34]. Das kollidiert jedoch mit der Voraussetzung, nach der die fraglichen Seiten unteilbar sind, und daher muß die Annahme, es gäbe unteilbare Linien, verworfen werden[35].

[33] βουλόμενοι δὲ τὰς οὐσίας ἀνάγειν εἰς τὰς ἀρχὰς μήκη μὲν τίθεμεν ἐκ βραχέος καὶ μακροῦ, ἔκ τινος μικροῦ καὶ μεγάλου, καὶ ἐπίπεδον ἐκ πλατέος καὶ στενοῦ, σῶμα δ' ἐκ βαθέος καὶ ταπεινοῦ. καίτοι πῶς ἕξει ἢ τὸ ἐπίπεδον γραμμὴν ἢ τὸ στερεὸν γραμμὴν καὶ ἐπίπεδον; ἄλλο γὰρ γένος τὸ πλατὺ καὶ τὸ στενὸν καὶ βαθὺ καὶ ταπεινόν. ὥσπερ οὖν οὐδ' ἀριθμὸς ὑπάρχει ἐν αὐτοῖς, ὅτι τὸ πολὺ καὶ ὀλίγον ἕτερον τούτων, δῆλον ὅτι οὐδ' ἄλλο οὐδὲν τῶν ἄνω ὑπάρξει τοῖς κάτω. ἀλλὰ μὴν οὐδὲ γένος τὸ πλατὺ τοῦ βαθέος· ἦν γὰρ ἂν ἐπίπεδόν τι τὸ σῶμα. ἔτι αἱ στιγμαὶ ἐκ τίνος ἐνυπάρξουσιν; τούτῳ μὲν οὖν τῷ γένει καὶ διεμάχετο Πλάτων ὡς ὄντι γεωμετρικῷ δόγματι, ἀλλ' ἐκάλει ἀρχὴν γραμμῆς, τοῦτο δὲ πολλάκις ἐτίθει τὰς ἀτόμους γραμμάς. καίτοι ἀνάγκη τούτων εἶναί τι πέρας· ὥστ' ἐξ οὗ λόγου γραμμή ἐστι, καὶ στιγμή ἐστιν. Arist. *Metaph.* I 9 992a10–24.

[34] Euklid, *Elemente*, Satz I.1 und Satz I.10.

[35] Wie Anm. 8 (970a9–12).

Am Ende einer ersten Folge von Argumenten gegen die Vorstellung, nach der sich die Existenz unteilbarer Linien mit einem Rückgriff auf das Wissen der Geometer erschließen lassen soll[36], stellt der Autor der *Linienschrift* zusammenfassend fest, daß der Linienatomismus statt dessen gegen so gut wie jeden Lehrsatz der Geometer verstößt[37]. Ganz ähnlich hat sich in der Spätantike Syrian zu dieser Frage geäußert[38], und aus dem gleichen Grund zählte Otto Apelt Platon mit einem Hinweis auf die eben angeführte Stelle aus der *Linienschrift* zu den Widersachern der Mathematik im Altertum, wobei das Unbehagen von Apelt darüber, daß er Platon damit de facto jede Kompetenz auf dem Gebiet der Mathematik absprach, deutlich zu spüren ist[39].

Eine ganz andere Deutung des (auch) von Platon vertretenen Linienatomismus zielt darauf ab, diese Lehre als wohlbegründet erscheinen zu lassen. Als prominenten Vertreter dieser Interpretation nenne ich Konrad Gaiser, der zu belegen versucht, daß man in der Theorie von den Atomlinien früher nur deshalb nicht mehr als eine absonderliche Lehre des Xenokrates gesehen hat, weil „man sie nicht in dem Zusammenhang der platonischen Prinzipienlehre und Ontologie einbeziehen konnte“[40]. Er selbst bemüht sich danach, aus dem „Zusammenhang der platonischen Prinzipienlehre und Ontologie“[41] heraus zu zeigen, daß die Argumente aus den Zeilen 968b4–12 der *Linienschrift* für die Existenz atomarer Linieneinheiten, die [nach Gaiser] auf Platon selbst zurückgehen[42], „lückenlos und sachlich wohlbegründet“[43] sind, doch Gaisers Deutung dieser Stelle kann nicht als wohlbegründet gelten.

Der Text der Schrift Περὶ ἀτόμων γραμμῶν, den die Kodizes bieten, ist an vielen Stellen durch Abschreibfehler entstellt. Zu den besonders schlecht überlieferten Passagen gehören auch die eben erwähnten Zeilen 968b4–12, die schon Michael

[36] In den Zeilen 968b5–23 trägt der Autor der *Linienschrift* (Schein-)Argumente für den Linienatomismus vor, die dessen Verfechter vorgeblich dem, was in den mathematischen Wissenschaften gelehrt wird, entnommen haben.

[37] Wie Anm. 8 (970a19).

[38] Syrianos, *In Metaphysica commentaria* [CAG Bd. VI, Teil I], edidit Wilhelm Kroll, Berlin 1902, 123. 31–34.

[39] Otto Apelt, Die Widersacher der Mathematik im Altertum, in: O. Apelt, Beiträge zur Geschichte der griechischen Philosophie, Leipzig 1891, 253–286, dort 263–264.

[40] Konrad Gaiser, Platons ungeschriebene Lehre. Studien zur systematischen und geschichtlichen Begründung der Wissenschaften in der Platonischen Schule, Stuttgart 1998 (ND von [2]1968, [1]1963) 158.

[41] K. Gaiser (wie Anm. 40).

[42] Gaiser spricht im Zusammenhang mit den Argumenten für die Existenz unteilbarer Linien aus der Schrift Περὶ ἀτόμον γραμμῶν von dem „Vertreter der Atomlinien, in dem wir Platon selbst erkennen können“ (wie Anm. 40) 377; s. auch ebd. 159. Diese Zuschreibung der (Schein-)Beweise für den Linienatomismus an Platon läßt sich jedoch durch keine antike Quelle belegen. Sie ist vielmehr ausschließlich in Gaisers Deutung der fraglichen Passage aus der *Linienschrift* fundiert, auf die ich gleich genauer eingehen werde.

[43] K. Gaiser (wie Anm. 40) 162.

Hayduck zu der Bemerkung veranlaßten: „his verbis nisi asperiorem medicinam adhibueris, nullam ex iis sententiam elicias.“[44] Als Medizin, die hier verabreicht werden muß, eignet sich meiner Ansicht nach allerdings nicht irgendeine platonische Philosophie, sondern die Mathematik der Griechen des 4. Jahrhunderts v.Chr.; denn sobald man deren spezifische Begriffsbildungen in Betracht zieht, durchschaut man das fragliche (Schein-)Argument leicht. Es beginnt mit den gut überlieferten Sätzen: „Weiter: Wie [die Vertreter des Linienatomismus] behaupten, soll auch aus dem, was [die Gegner des Linienatomismus] selber in den mathematischen [Wissenschaften] lehren, [hervorgehen], daß es eine unteilbare Linie gibt, [und zwar genauer dann], wenn [Linien] kommensurabel sind, die von demselben Maß gemessen werden.“[45]

Mit den Worten am Schluß dieses Zitats, nach denen ‚[Linien] kommensurabel sind, die von demselben Maß gemessen werden‘, spielt der Vertreter des Linienatomismus auf die von den griechischen Geometern benutzte Definition des Begriffes ‚kommensurabel‘ an, die in Euklids *Elementen* vollständig wie folgt lautet: Definition X.1: „Kommensurable Größen nennt man [Größen], die von demselben Maß gemessen werden, inkommensurable [Größen nennt man] dagegen [Größen], für die kein gemeinsames Maß erzeugt werden kann.“[46]

Die Interpretation dieser Begriffsbestimmung bietet eine Reihe von Schwierigkeiten, zu denen die Frage gehört, ob die Def. X.1 besagen soll, daß der Begriff ‚inkommensurabel‘ auch auf Größenpaare angewendet werden darf, die aus einer Strecke und einer Fläche (oder etwas allgemeiner [und leicht anachronistisch] ausgedrückt, die aus zwei geometrischen Objekten von unterschiedlicher Dimension) bestehen, oder ob zwei solche Größen maßtheoretisch als unvergleichbar galten. Ich umgehe dieses Problem, auf das ich später noch ausführlich eingehen werde, vorerst dadurch, daß ich den Anwendungsbereich der Def. X.1 (wie der Autor der *Linienschrift* in den Zeilen 968b4–12) auf Strecken einschränke; denn danach steht man nur noch vor der Frage, welche Struktur die Mengen haben, deren Elemente Strecken sind, die dem Kommensurabilitätskriterium aus der Def. X.1 genügen.

Wenn man den ersten Teil der Definition X.1 isoliert betrachtet, kann sie leicht mißverstanden werden. Ihr erster Satz scheint zu besagen, daß es für jede Menge von Strecken, deren Elemente mit einer fest vorgelegten Strecke kommensurable sind, ein- und dasselbe wohlbestimmte Maß gibt, das alle Elemente dieser Mengen mißt, und ganz in diesem Sinne ist er von dem Verfechter der unteilbaren Linien aus der Schrift Περὶ ἀτόμων γραμμῶν (absichtlich oder irrtümlich fehl-)interpretiert worden. Eine korrekte Interpretation der Def. X.1 erfordert jedoch, daß man

[44] Michael Hayduck, De Aristotelis qui fertur Περὶ ἀτόμων γραμμῶν libello, in: Jahrbücher für klassische Philologie, 20. Jahrgang 1874, 161–171, dort 162.

[45] *De lineis insecabilibus*, 969b4–6.

[46] σύμμετρα μεγέθη λέγεται τὰ τῷ αὐτῷ μέτρῳ μετρούμενα, ἀσύμμετρα δέ, ὧν μηδὲν ἐνδέχεται κοινὸν μέτρον γενέσθαι, Euklid (wie Anm. 16) Def. X. 1.

sich zunächst klar macht, was die griechischen Geometer unter den Begriffen ‚Maß' und ‚messen' verstanden haben. Ihre Bedeutung wurde von ihnen stillschweigend für allgemein bekannt gehalten; denn die aus der Antike überlieferten Texte der Mathematiker enthalten keine Definitionen, in denen erklärt wird, welche Bedeutung die Termini μέτρον und μετρεῖν haben sollen. Man muß sie demnach einer Analyse der dafür einschlägigen Texte[47] entnehmen und die zeigen zusammen mit den Ausführungen des Aristoteles zum Begriff des μέτρον[48], daß eine Größe M dann und nur dann als ein Maß einer anderen Größe G galt, wenn es eine positive ganze Zahl g von der Art gibt, daß die Beziehung $G = g \cdot M$ besteht, wozu noch angemerkt sei, daß dieser Sachverhalt in den Texten der Griechen nie symbolisch durch eine Formel wie $G = g \cdot M$, sondern stets explizit durch einen Satz wie ‚M mißt G (genau g-mal)' beschrieben wird. Dabei muß streng beachtet werden, daß der Buchstabe g in dieser Beziehung stets eine positive ganze Zahl vertritt, und nunmehr läßt sich zeigen, welche Struktur die Mengen haben, deren Elemente Strecken sind, die dem Kommensurabilitätskriterium aus der Def. X.1 genügen.

K(M) sei eine Menge von miteinander kommensurablen Strecken, die durch ein- und dasselbe Maß M gemessen werden. Dann lassen sich die Elemente von K(M) in der Form $S_k = i_k \cdot M$ darstellen, wobei i_k stets eine wohlbestimmte positive ganze Zahl ist. Man macht sich nun leicht klar, daß eine solche Menge K(M) nie alle Strecken enthalten kann, die nach dem Kriterium aus der Def. X.1 mit den Elementen von K(M) kommensurabel sind; denn in ihr fehlen diejenigen Strecken, die einerseits kleiner als M, andererseits aber dennoch mit M und damit auch mit allen Strecken, die in der Form $S = i \cdot M$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ dargestellt werden können, kommensurabel sind. Das soll an einem Beispiel klargemacht werden.

Wie oben erläutert, kann M nicht als Maß der Strecken M_2 und M_3 dienen, die sich von der Strecke M dadurch abspalten lassen, daß man M halbiert bzw. in drei gleiche Teilstrecken zerlegt[49], weil M_2 und M_3 keine ganzzahligen Vielfachen von M sind. Mithin gehören sie nicht zu der Menge K(M), deren Elemente durchweg von M gemessen werden sollten; aber nichtsdestoweniger sind M_2 und M_3 mit M und allen Strecken aus K(M) kommensurabel. Die Menge, die man dadurch erhält, daß man zu der Menge K(M) die Strecken M_2 und M_3 hinzunimmt, werden zum Beispiel durch das Maß M_6 gemessen, das entsteht, wenn man M in sechs gleiche Teilstrecken zerlegt; denn nunmehr gelten für alle S_k die Beziehungen $S_k = 6 \cdot i_k \cdot M_6$ sowie $M_2 = 3 \cdot M_6$ und $M_3 = 2 \cdot M_6$, in denen die Zahlen $6 \cdot i_k$ ebenso wie die Zahlen 2 und 3 positiv und ganz sind[50].

47 Eine Sammlung solcher Textstellen findet man bei Charles Mugler, Dictionnaire historique de la terminologie géométrique des grecs, Paris 1958–1959, 291.

48 Arist., *Metaph.* X 1, 1052b18–1053a14.

49 Euklids Strahlensatz VI.4 beschreibt ein Verfahren, nach dem sich eine Strecke M in n-te Teile $(n = 2, 3, 4, \ldots)$ zerlegen läßt.

50 Bei der Bestimmung des Maßes M_6 kann man dem Schema folgen, nach dem Euklid in seinen Sätzen X.3–4 aus den Elementen sukzessiv das größte gemeinsame Maß von n $(n = 2, 3, \ldots)$ Größen bestimmt, die miteinander kommensurabel sind.

Aus diesen Überlegungen folgt sofort, daß es nach Maßgabe der griechischen Mathematik kein Maß M(L) gibt, das *alle* Strecken mißt, die mit einer vorgelegten Strecke L kommensurabel sind. Zum anderen sei noch expressis verbis darauf hingewiesen, daß in das eben vorgestellte Argument der etwas elliptisch formulierte zweite (vom Autor des Arguments aus den Zeilen 968b4–12 der *Linienschrift* unterdrückte) Teil der Def. X.1 eingeht, nach dem Größen als inkommensurabel gelten, wenn sich für sie kein gemeinsames Maß erzeugen läßt. Falls für eine Menge K(M), deren Elemente im Sinne der Def. X.1 miteinander kommensurable Strecken sind, weil sie ein- und dasselbe Maß M mißt und für eine weitere Strecke L sowie die Menge K(M) ein gemeinsames Maß M(L) erzeugt werden kann, ist L mit den Elementen von K(M) kommensurabel, und wie das oben angeführte Beispiel exemplarisch zeigt, läuft das ‚Erzeugen' aus der Def. X.1 stets auf das Abspalten eines n – ten Teils des schon vorliegenden Maßes M hinaus, der außerdem ein k – ter Teil von L sein muß und nunmehr als das neue Maß fungiert, von dem alle Elemente der Menge gemessen werden, die aus der vorgelegten Menge K(M) durch das Hinzunehmen von L entstanden ist. Läßt sich ein solches Maß M(L) dagegen nicht erzeugen, dann ist L mit allen Elementen aus K(M) inkommensurabel.

Nunmehr läßt sich leicht nachvollziehen, welcher Fehler dem Trugschluß zu Grunde liegt, mit dem der Vertreter des Linienatomismus nach den Zeilen 968b 4–12 der *Linienschrift* aus der von ihm (absichtlich oder unabsichtlich) nur unvollständig angeführten Def. X.1 zu deduzieren versucht, daß es Linienatome geben muß. Wie oben angedeutet, mißversteht er den ersten, von ihm nahezu wörtlich angeführten Satz aus dieser Begriffsbestimmung dahingehend, daß es zu der Menge aller mit einer vorgelegten Strecke kommensurablen Strecken ein wohlbestimmtes Maß M geben soll, von dem alle Elemente dieser Menge gemessen werden. Außerdem geht in seinen Schluß die korrekte Zusatzprämisse ein, daß die Strecke M_2, die durch ein Halbieren von M entsteht, zur Menge aller mit M kommensurablen Strekken gehört. Nach dem von ihm adäquat angewendeten Maßbegriff der griechischen Mathematiker kann M die Strecke M_2 aber nicht messen, und damit ist der Vertreter des Linienatomismus auf einen Widerspruch zu seiner Prämisse gestoßen, nach der es zu jeder Menge von miteinander kommensurablen Strecken ein wohlbestimmtes Maß gibt, das alle Elemente dieser Menge mißt. Daraus zieht er den Fehlschluß, daß die Strecke M nach Maßgabe der Def. X.1 unteilbar sein muß, während er korrekterweise schließen müßte, daß seine Prämisse, nach der es zu jeder Menge von miteinander kommensurablen Strecken ein Maß gibt, das alle ihre Elemente mißt, auf eine Fehldeutung der Definition des Begriffes ‚kommensurabel' zurückgeht, und ganz in diesem Sinne betont der Verfasser der *Linienschrift* am Schluß seiner Widerlegung des eben referierten Trugschlusses aus den Zeilen 968b4–12, es sei falsch anzunehmen, daß es ein gemeinsames Maß für alle Größen gibt, die miteinander kommensurabel sind[51].

[51] *De lineis insecabilibus*, 969b10–12.

Die Vorstellung von einem absoluten Maß, das den Einheitsstrecken in dem jedem Leser dieser Zeilen vertrauten cartesischen Koordinatensystem entspricht, ist bei den griechischen Geometern nie Gegenstand einer mathematischen Theorie gewesen. Dabei handelt es sich keineswegs um ein leicht zu behebendes Versäumnis; denn eine Beziehung der Form $G = a \cdot M$, in der M ein ‚absolutes Maß' und a eine positive rationale Zahl wie 3/7, eine irrationale Zahl wie $\sqrt{2}$ oder gar eine transzendente Zahl wie π sein darf, konnte von den Griechen schon deshalb nicht in ihre Geometrie integriert werden, weil zu den Zahlen, die zum Objektbereich ihrer wissenschaftlichen Praxis gehörten, noch nicht einmal die rationalen Zahlen (und erst recht nicht die irrationalen und die transzendenten Zahlen) gehörten[52], doch das ist von K. Gaiser übersehen worden. Im Rahmen seiner Deutung der Zeilen 968b4–12 der *Linienschrift* kommt er zunächst (ganz im Einklang mit den oben vorgestellten Argumenten) zu dem Schluß, daß „die Forderung nach einem Maß, das Teile und Ganzes zugleich messen [soll] zu einem unendlichen Prozeß der Teilung [führt]"[53]. Danach ist ihm jedoch entgangen, daß die Konstruktion dieser potentiell unendlichen Folge von immer wieder neuen Maßen, deren Elemente aber immer wohlbestimmte Strecken bleiben, keineswegs gegen die Prinzipien der griechischen Mathematik verstößt. Statt dessen behauptet Gaiser, daß Platon, dem er das Argument aus den Zeilen 968b4–12 der *Linienschrift* damit expressis verbis zuschreibt[54], in dem fraglichen Teilungsprozeß zu Recht „eine Unmöglichkeit [erkannte], der man nur durch die Annahme einer atomaren Einheit entgehen kann. In dem unendlichen Prozeß würde nämlich das einheitliche Maß überhaupt verloren gehen, so daß es ein messendes Feststellen *absoluter* (*normativer*) Größen nicht mehr gäbe, an dessen grundsätzlicher Möglichkeit doch nicht zu zweifeln ist"[55].

Diese Deutung ist unhistorisch; denn wie ich schon erläuterte, sind die von den griechischen Mathematikern benutzten Begriffe des Maßes und des Messens mit der Vorstellung von der ‚grundsätzlichen Möglichkeit eines messenden Feststellens *absoluter* (*normativer*) Größen' nicht kompatibel. Ganz abgesehen davon kann man der Unmöglichkeit des Feststellens absoluter normativer Größen durch die Annahme einer atomaren Einheit – wie weiter oben schon erwähnt – nur um den Preis entgehen, daß so gut wie alle Sätze aus der Geometrie der Griechen nur noch in Sonderfällen gelten, und damit dürfte wohl hinlänglich klar sein, daß Gaisers Behauptung, „der ganze Beweis für die Existenz atomarer Linieneinheiten [aus den

[52] Dazu verweise ich auf David H. Fowlers Untersuchungen zum Zahlbegriff der griechischen Mathematiker, The Mathematics of Plato's Academy, Oxford 1987, 221–279, sowie auf H.-J. Waschkies, Mathematische Schriftsteller, in: Grundriß der Geschichte der Philosophie. Begründet von Friedrich Überweg. Völlig neubearbeitete Ausgabe. Redaktion Wolfgang Rother. Die Philosophie der Antike, hrsg. von Hellmut Flashar, Bd. II/1: Sophistik. Sokratik. Mathematik. Medizin, Basel 1998, 365–453, dort 413–414.

[53] K. Gaiser (wie Anm. 40) 159.

[54] Siehe Anm. 42.

[55] K. Gaiser (wie Anm. 53).

Zeilen 968b4–12 der *Linienschrift* sei] lückenlos und sachlich wohlbegründet“[56], zumindest dann unhaltbar ist, wenn man das Adjektiv ‚sachlich‘ im Sinne von ‚nach Maßgabe der griechischen Mathematik‘ versteht. Das war Gaiser übrigens durchaus klar; denn er bemerkt dazu in einer Anmerkung: „Speziell *mathematisch* kann jede kontinuierlich ausgedehnte Größe als ins Unendliche teilbar gelten; und so steht mathematisch auch allenfalls die relative Kommensurabilität und Inkommensurabilität fest (φύσει), während die Annahme jeder absoluten Maßeinheit beliebig bleibt (θέσει). ... Platon fordert darüber hinaus, daß *ontologisch* eine maßgebende Einheit existieren muß (φύσει) bzw. daß das jeweils maßgebende Peras dem Sein nach selbstständig ist.“[57]

Dazu sei vorab angemerkt, daß ein Begriff, ein Satz oder ein Beweis entweder zur (griechischen) Mathematik gehört oder nicht. Begriffe, Sätze und Beweise, die in einem allgemeineren oder gar ‚tieferen‘ Sinne mathematisch sein sollen als die ‚nur speziell mathematischen‘, können nur dann zur Mathematik der Griechen gezählt werden, wenn sich das Wissen der Mathematiker jener Zeit rational nachvollziehbar aus jenem allgemeineren oder tieferen Wissen deduzieren läßt. Mir ist jedoch kein einziger antiker oder moderner Text bekannt, in dem das von Platon im Liniengleichnis aus der *Politeia* vorgestellte Programm, die Mathematik von damals in seiner Philosophie zu fundieren, mit Erfolg realisiert worden wäre[58], und die Passagen IV 716C und VII 820C aus den *Nomoi*, auf die Gaiser an der oben zitierten Stelle verweist, können auch nicht als Belege dafür gelten.

In den Zeilen 716C aus den *Nomoi* läßt Platon seinen Athener sagen, daß Gott weit eher als jeder Mensch Maß aller Dinge ist, wenn es um eine Antwort auf die Frage geht, welche Handlungen der Menschen Gott wohlgefällig sind. Mit dieser Kritik an Protagoras, der den Menschen zum Maß aller Dinge erklärt hatte[59], wird Gott zum absoluten Maß menschlichen Handelns gemacht. Dabei benutzt Platon zwar das Wort μέτρον, das zu den Termini der griechischen Mathematik gehört; aber im übrigen geht aus dem Kontext der Stelle nicht einmal andeutungsweise hervor, daß man aus der Behauptung, nach der das Handeln Gottes als das absolute Maß allen menschlichen Handelns zu betrachten ist, darauf schließen soll oder gar kann, daß es in der Geometrie gleichfalls ein absolutes Maß gibt, mit dem sich alle (mit ihm vergleichbaren Größen) messen lassen.

Mathematikgeschichtlich interessanter ist Gaisers Verweis auf die Zeile 820C5 aus demselben Werk; denn im Kontext dieser Stelle geht Platon zum einen auf ein Problem ein, von dem auch in der *Linienschrift* die Rede ist. Dazu sei noch kurz

56 K. Gaiser (wie Anm. 40) 162.

57 K. Gaiser (wie Anm. 40) 376.

58 Dazu verweise ich ergänzend auf H.-J. Waschkies, Anfänge der Arithmetik im Alten Orient und bei den Griechen, Amsterdam 1989, 318–326; sowie auf H.-J. Waschkies (wie Anm. 1) 101–104.

59 Siehe Aristot. *Metaph.* XI 6, 1062b13–14 (Protagoras – Fragment 80 A 19).

angemerkt, daß die *Nomoi* nach einer Notiz von Diogenes Laertios erst nach Platons Tod von Philippos aus Opus veröffentlicht wurden, der sie auf Wachstafeln geschrieben vorgefunden hatte[60]; aber dadurch wird der Wert dieser Quelle für die Mathematikgeschichte nicht geschmälert. Aristoteles betrachtet die *Nomoi* nämlich uneingeschränkt als Platons Werk[61], und selbst dann, wenn Philippos aus Opus Platons Text redaktionell (oder gar inhaltlich) geändert haben sollte[62], wären die *Nomoi* immer noch ein wichtiger Beleg für das mathematische Wissen der Älteren Akademie, weil man aus einer Kritik des Isokrates an von gewissen ‚Sophisten' abgefaßten νόμοι καὶ πολιτείαι schließen kann, daß die *Nomoi* spätestens seit dem Frühjahr 346 v.Chr. ediert vorgelegen haben[63].

Im Abschnitt 817E–820C aus dem VII. Buch der *Nomoi* regt der Athener (der dort die Ansichten Platons vertritt) an, daß zum Unterricht der Freien auch die Wissenschaft vom Messen von Länge, Breite und Tiefe gehören soll[64]. Ein wenig später weist er dann noch pointiert darauf hin, daß die Unterweisung in diesem Fach neben der Vermittlung von elementaren Kenntnissen auch das Ziel haben müßte, die Griechen von einer lächerlichen und üblen Unwissenheit zu befreien, in der sie im Hinblick auf die Messungen befangen sind, die sich auf das beziehen, was Länge, Breite und Tiefe hat[65]. Als sein Gesprächspartner Kleinias zu verstehen gibt, daß er nicht recht wisse, worum es dabei geht, räumt der Athener ein, selbst auch erst spät (ὀψέ ποτε)[66] auf den fraglichen Irrtum aufmerksam gemacht worden zu sein. Danach fragt der Kleinias weiter, ob der nicht meine, Länge, Breite und Tiefe seien alle im Verhältnis zueinander meßbar[67], und als dieser bejaht, stimmt der Athener dem bei, weil man „natürlicherweise Länge gegen Länge, Breite gegen Breite, und ebenso Tiefe [gegen Tiefe] messen [kann]."[68]

Daran besteht also kein Zweifel; doch dann fragt der Athener weiter:
„Aber was [hat es mit der Meßbarkeit] von Länge und Breite [im Verhältnis] zur Tiefe, oder von Breite und Länge zueinander [auf sich]? … Sind wir Griechen hin-

60 Diogenes Laertios, *Vitae philosophorum* I–II. Recognovit H.S. Long, Oxford 1964, III, 37.

61 Aristoteles, *Politica*. Ed. W.D. Ross, Oxford 1957, II 7, 1266b5 und II 9, 1271b1.

62 Das von Diogenes Laertios in diesem Zusammenhang benutzte Verb μεταγράφειν (wie Anm. 60) läßt beide Deutungen zu.

63 Isokrates, *Discours* Vol. IV. Texte établi et traduit par G. Mathieu et E. Brémond, Paris 1962, *Philippos* 12; zur Datierung der Philipposrede verweise ich auf G. Mathieu (ebd.) 8.

64 μετρικὴ [ἐπιστήμη] μήκους καὶ πλάτους καὶ βάθους *Nomoi* 817E.

65 ἐν ταῖς μετρήσεσιν, ὅσα ἔχει μήκη καὶ πλάτη καὶ βάθη, *Nomoi* 819C–D.

66 *Nomoi* 819D.

67 γιγνώσκεις που μῆκος [καὶ] πλάτος … καὶ τρίτον τούτων βάθος; … ἆρ' οὖν οὐ δοκεῖ σοι ταῦτα εἶναι πάντα μετρητὰ πρὸς ἄλληλα, *Nomoi* 819E.

68 μῆκός τε οἶμαι πρὸς μῆκος, καὶ πλάτος πρὸς πλάτος, καὶ βάθος ὡσαύτως δυνατὸν εἶναι μετρεῖν φύσει, *Nomoi* 819E–820A.

sichtlich dieser nicht alle der Ansicht, daß man sie auf irgendeine Weise [im Verhältnis] zueinander messen kann?"[69]

Auch dem stimmt Kleinias zu, doch darauf fragt der Athener nach, was man denn sagen solle, wenn sich herausstellt, daß es auf gar keine Weise möglich ist, eine Länge mit einer Breite oder eine Tiefe mit einer Länge oder Breite mit einer Länge messend zu vergleichen, obgleich die Griechen dieser Ansicht sind. Als Mittel zur Behebung dieses Irrtums schlägt er nun vor, daß der mathematische Unterricht auch lehren soll, wie mathematische Objekte ihrer Natur nach beschaffen sein müssen, damit sie im Vergleich miteinander meßbar (μετρητός) oder auch nicht-meßbar (ἄμετρος) sind, und dazu merkt er dann noch an, daß sich selbst die alten Leute dieses Wissen noch verschaffen können und sollen[70].

Das ὀψέ ποτε aus den eben zitierten bzw. referierten Zeilen ist von Heinrich Vogt 1913 in einer Untersuchung über „Die Entdeckungsgeschichte des Irrationalen nach Plato und anderen Quellen des 4. Jahrhunderts" im Rahmen einer weit ausholenden Interpretation (die andere Textstellen aus dem *Corpus Platonicum* einbezieht), als Beleg dafür angeführt worden, daß Theodoros aus Kyrene, den Platon im Prooemium des *Theaetet* als Mathematiker auftreten läßt[71], die Lehre von den inkommensurablen Größen nicht früher als im letzten Jahrzehnt des 5. Jahrhunderts v.Chr. entdeckt hat, und weiter daß Platon von Theodoros anläßlich eines Besuchs in Kyrene, den Vogt auf das erste Jahrzehnt des 4. Jahrhunderts datierte, in diese Lehre eingeführt worden ist[72]. Diese Deutumg des ὀψέ ποτε samt der daraus abgeleiteten Datierung der Lehre von den inkommensurablen Größen (die Vogt wie viele ältere Autoren noch als Lehre vom Irrationalen bezeichnete), hat Hieronymus-Georg Zeuthen unmittelbar darauf energisch zurückgewiesen, weil er die fragliche Lehre für eine weitaus frühere Errungenschaft der griechischen Mathematiker hielt[73]. Auf die Frage, wann den Griechen die Entdeckung der inkommensurablen Größen gelungen ist, von denen keine vorplatonische Quelle berichtet, gehe ich in dieser Untersuchung nicht ein. Statt dessen will ich vorab darauf aufmerksam machen, daß es an der fraglichen Stelle um ein Problem geht, das in der Zeit Platons wahrscheinlich gar nicht im Zusammenhang mit der Lehre von den inkommensurablen Größen diskutiert worden ist, obwohl das seit dem Erscheinen der Arbeiten

[69] τί δ᾽ αὖ μῆκός τε καὶ πλάτος πρὸς βάθος, ἢ πλάτος τε καὶ μῆκος πρὸς ἄλληλα; … ἆρ᾽ οὐ διανοούμεθα περὶ ταῦτα οὕτως Ἕλληνες πάντες, ὡς δυνατά ἐστι μετρεῖσθαι πρὸς ἄλληλα ἁμῶς γέ πως; *Nomoi* 820A.

[70] Die Wissenschaft vom Messen erfordert demnach eine Beantwortung der Frage τὰ τῶν μετρητῶν τε καὶ ἀμέτρων πρὸς ἄλληλα ἥτινι φύσει γέγονεν (*Nomoi* 820C).

[71] *Theaetet* 147C–148B.

[72] Heinrich Vogt, Die Entdeckungsgeschichte des Irrationalen nach Plato und anderen Quellen des 4. Jahrhunderts, in: Bibliotheca Mathematica 10 (3. Folge), 1909–1910, 97–155, dort 136–141.

[73] Hieronymus-Georg Zeuthen, Sur la constitution des livres arithmétiques des Eléments d'Euclide et leur rapport à la question de l'irrationalité, in: Oversigt over det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger 1910 (Nr. 5, 395–435).

von Vogt und Zeuthen immer wieder kommentarlos unterstellt wurde und inzwischen als communis opinio gilt[74].

Bei meinen Überlegungen zur Deutung der Zeilen 817E–820C aus den *Nomoi* gehe ich von dem Ausdruck μετρικὴ μήκους καὶ ἐπιπέδου καὶ βάθους in den Zeilen 817E aus, auf den schon Eva Sachs aufmerksam geworden war. Sie sah darin den Versuch Platons, einen Namen für eine Geometrie (im Sinne der Mathematik unserer Tage) zu finden, die nicht nur die Linien und Flächen, sondern auch die Körper erfaßt[75]. Diese Deutung klingt für einen Leser von heute plausibel, weil er in der Zusammenfassung der (ebenen) Geometrie mit der Stereometrie zu einer übergreifenden Wissenschaft einen Fortschritt bei dem Bemühen um ein Systematisieren und um Vereinheitlichung der mathematischen Wissenschaften sieht (den er Platon gerne zuschreiben würde); aber ein Vergleich zwischen der fraglichen Passage aus den *Nomoi* und den dafür einschlägigen Texten der griechischen Mathematiker führt zu einem ganz anderen Ergebnis.

Dazu weise ich zunächst darauf hin, daß der Athener in den *Nomoi* nicht fordert, daß man lernen soll, von welcher Natur zwei Größen sein müssen, die miteinander kommensurabel (σύμμετρος) oder inkommensurabel (ἀσύμμετρος) sind, sondern von welcher Natur sie sein müssen, damit sie im Verhältnis zueinander meßbar (μετρητός) – oder nicht – meßbar (ἄμετρος) sind bzw. unter welchen Bedingungen das überhaupt nicht möglich ist[76]. Wie schon die Tatsache zeigt, daß die Zeilen 817E–820C aus den *Nomoi* im Anschluß an Vogt und Zeuthen immer wieder als Quelle betrachtet worden sind, die etwas von der Vorgeschichte der Lehre von den inkommensurablen Größen aus Euklids *Elementen* berichtet, hat man das Begriffspaar μετρητός – ἄμετρος im allgemeinen stillschweigend und kommentarlos mit dem Begriffspaar σύμμετρος – ἀσύμμετρος aus Euklids oben zitierter Definition X.1 gleichgesetzt, doch dagegen sind von Bernard Vitrac erst kürzlich Be-

[74] Dazu verweise ich auf die einflußreichen Arbeiten von Eva Sachs, Die fünf platonischen Körper. Zur Geschichte der Mathemathik und der Elementenlehre Platons und der Pythagoreer, Berlin 1917, 160–184; Thomas Little Heath, A History of Greek Mathematics I: From Thales to Euclid; II: From Aristarchus to Diophantus, Oxford 1921 (ND 1960 und öfter), I 304; Erich Frank, Plato und die sogenannten Pythagoreer, Halle a.d. S. 1923 (ND Darmstadt 1962), 59 und 353; Robert S. Brumbaugh, Plato's Mathematical Imagination. The Mathematical Passages in the Dialogues and Their Interpretation, Bloomington 1954 (ND New York 1968), 62–64; Attilio Frajese (wie Anm. 13) 197–199; Konrad Gaiser (wie Anm. 40) 50. 294–295. 370–371. 376. 472 und 503; Wilbur Richard Knorr, The Evolution of the Euclidean Elements. A Study of the Theory of Incommensurable Magnitudes and Its Significance for Early Greek Geometry, Dordrecht/Boston 1975, 78 und 102–103; sowie Maurice Caveing, La constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque I: Essai sur le savoir mathématique dans les Mésopotamie et l'Egypte anciennes, Lille 1994, II: La figure et le nombre. Recherches sur les premières mathématiques des grecs, III: L'irrationalité dans les mathématiques grecques jusqu' à Euclide, Villeneuve d'Ascq [Nord] 1994–1998, III, 133.

[75] E. Sachs (wie Anm. 74) 161.

[76] μηδαμῶς μηδαμῇ δύνατα, *Nomoi* 820B.

denken vorgetragen worden[77]. Vitrac sieht in der μετρικὴ [ἐπιστήμη] μήκους καὶ ἐπιπέδου καὶ βάθους aus den *Nomoi*, die E. Sachs noch als eine ,dreidimensionale Euklidische Geometrie' gedeutet hatte, eine ,Wissenschaft von den Maßen'[78], und daraus folgert er dann weiter, daß die Begriffe μετρητός und ἄμετρος eine etwas vage, auf diese Theorie des Messens bezogene Bedeutung haben und daher nicht mit dem Begriffspaar σύμμετρος – ἀσύμμετρος identifiziert werden dürfen.

Diese Deutung von Vitrac läßt sich präzisieren und noch etwas weiter absichern. Zum Kontext der fraglichen Passage aus den *Nomoi* gehört neben dem Terminus μετρικὴ [ἐπιστήμη] auch der Begriff μέτρησις, der die Handlung des Messens bezeichnet, um die es in der fraglichen Theorie des Messens geht. Auszüge aus einer solchen Lehre vom Messen sind uns nun aber in den *Definitiones* und den *Geometrica* des Heron aus Alexandria überliefert, dessen Tätigkeit als Wissenschaftler wohl in die Zeit um 62 n.Chr. fällt[79]. Dabei führt Heron seine Leser zwar wie in allen seinen Schriften zumeist nur exemplarisch in eine Praxis einer Technik ein; aber andererseits ist nicht minder deutlich, daß die fragliche Lehre theoretisch fundiert war. Als feste Grundsätze, die dem Messen zugrunde liegen[80], führt Heron nämlich in voller Allgemeinheit zum einen die sogenannte Dreiecksungleichung aus Euklids Satz I.20 an, nach dem in jedem Dreieck zwei Seiten zusammen größer sind als die dann noch übrige, und zum anderen das als ,Satz des Pythagoras' bekannte Theorem I.47 aus den *Elementen*, nach dem in jedem rechtwinkligen Dreieck die Quadrate über den Seiten um den rechten Winkel dem Quadrat über der Hypotenuse gleich sind[81]. Damit ist zugleich klar, daß es in der fraglichen Lehre vom Messen nicht nur um ein genaues Ausmessen ging (das die Griechen spätestens seit der Zeit von Aristoteles mit dem Terminus καταμετρεῖν und nicht mit dem Verb μετρεῖν

[77] Bernard Vitrac, Euklid, *Les Eléments*. Traduits du texte de Heiberg, Vol. I–III [Bd. IV ist noch nicht erschienen]. Introduction générale par M. Caveing. Traduction et commentaires par Bernard Vitrac, Paris 1990, 1994 und 1998, III 25–26.

[78] B. Vitrac spricht von einer ,métrique' bzw. science des mesures (wie Anm. 77) 25.

[79] Heron aus Alexandria wirkte im 3. Viertel des 1. Jh. n.Chr. In den *Dioptra* berichtet er nämlich über eine Mondfinsternis (Opera, III: Rationes dimetiendi et commentatio dioptrica – Vermessungslehre und Dioptra. Griechisch und deutsch herausgegeben von Hermann Schoene, Leipzig 1903 [ND 1976], Dioptra § 35, 302), die im Jahre 62 n.Chr. stattfand (O. Neugebauer, Über eine Methode zur Distanzbestimmung Alexandria – Rom bei Heron, Teil I, in: Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter, Hist. filol. Meddelelser 26, 1938–1939, Heft 2, 21–24). Das paßt zu der Datierung von Heron durch P. Keyser (Suetonis Nero 41.2 and the Date of Heron Mechanicus of Alexandria, in: CPh 83, 1988, 218–220); denn nach Keyser ,blühte' Heron in den Jahren 55–68 n.Chr.

[80] ὅροι τῆς μετρήσεως ἐστηριγμένοι, Heron aus Alexandria: Opera IV: Definitiones cum variis collectionibus. Heronis quae feruntur Geometrica. Mit Benutzung von Vorarbeiten von Wilhelm Schmidt griechisch – deutsch herausgegeben von Johann Ludwig Heiberg, Leipzig 1912 (ND 1976), *Definitiones*, Definitio 132, 92.20, und *Geometrica* 182,8. Die Herausgeber übersetzen das Nomen ὅρος an diesen Stellen (zu denen es meines Wissens keine Parallele bei einem anderen antiken Autor gibt), mit ,Norm', während ich es mit ,Grundsatz' wiedergegeben habe.

[81] Heron, *Definitiones* und *Metrica* (wie Anm. 80) 92 und 182.

beschrieben, wenn sie betonen wollten, daß irgendeine Größe G ein ganzzahliges Vielfaches eines Maßes M ist)[82], sondern auch um ein Abschätzen der Größenverhältnisse von Strecken, die inkommensurabel wie die Seite und die Diagonale des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks sind[83], und mithin kann man der Zeile 820C5 aus den *Nomoi* und ihrem Kontext nicht mit Gaiser entnehmen, daß es nach Maßgabe der Ontologie Platons ein absolutes Maß gibt, von dem alle miteinander kommensurablen Größen gemessen werden.

Einen zweiten Beleg dafür, daß der Begriff μέτρησις in der Antike auch ein bloßes Abschätzen bezeichnen konnte, findet man bei Eutokios aus Askalon, der um 480 n.Chr. geboren wurde[84]. In seinen Kommentaren zu den Schriften des Archimedes kündigt Eutokios nämlich Erläuterungen zu einer nur als Fragment erhaltenen Abhandlung an, „die den Titel κύκλου μέτρησις trägt“[85]. Der Hauptsatz, den Archimedes darin mitteilt, besagt nun aber, „daß der Umfang jedes Kreises dessen Durchmesser um das Dreifache und weniger als ein Siebentel, aber um mehr als zehn Einundsiebzigstel dazu übertrifft“[86], und somit bezeichnete der Terminus μέτρησις damals nicht nur ein exaktes Ausmessen (das in diesem Falle nicht gelingen konnte, weil die gesuchte Proportionalitätskonstante, die man heute als π bezeichnet, eine transzendente Zahl ist)[87], sondern auch eine Abschätzung.

Nicht minder wichtig ist die Mitteilung von Heron, nach der das Messen in die drei Gattungen der Streckenmessung, Flächenmessung und Körpermessung zerfällt, die er wie folgt voneinander trennt:

[82] Belege dafür findet man bei Charles Mugler, Dictionnaire historique de la terminologie géométrique des grecs, Paris 1958–1959, 244.

[83] Das meistgenannte Beispiel für ein Paar inkommensurabler Strecken sind die Seite S und Diagonale D aus ein- und demselben Quadrat. In diesem Fall gilt die Ungleichung $S + S = 2 \cdot S > D$, die ebenso zu einer (groben) Abschätzung für das Verhältnis dienen kann, in dem die Größen S und D zueinander stehen, wie die Gleichung $Q(S) + Q(S) = 2 \cdot Q(S) = Q(D)$, in der Q (S) und Q (D) die Quadrate über S und D bezeichnen.

[84] Paul Tannery, Eutocius et ses contemporains, in: P. Tannery, Mémoires scientifiques. Publiés par J.-L. Heibert et H.-G. Zeuthen. II: Sciences exactes dans l'antiquité 1883–1898 Toulouse; Paris 1912 (ND Paris 1995), 118–136, dort 118–131.

[85] Eutokios aus Askalon, *Commentarius in dimensionem circuli*, in: Archimedes, Opera omnia cum commentariis Eutocii. Iterum edidit Johann Ludwig Heiberg, corrigenda adiecit Evangelos S. Stamatis III, Stuttgart 1972 (²1915, ¹1881), 227–261, dort 328. 9–10.

[86] παντὸς κύκλου ἡ περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ καὶ ἔτι ὑπερέχει ἐλάσσον μὲν ἑβδόμῳ μέρει τῆς διαμέτρου, μείζονι δὲ ἡ δέκα ἑβδομηκοστομόνοις, Archimedes, Opera (wie Anm. 85) I: *De Sphaera et cylindro. Dimensio circuli. De conoidibus* et *sphaeroidibus, Dimensio circuli*, Satz 3, 236. 8–11.

[87] Johann Heinrich Lambert gelang 1770 als erstem ein Nachweis dafür, daß die Zahl π aus der Gleichung $u = \pi \cdot d$, in der d den Durchmesser und u den Umfang ein- und desselben Kreises bezeichnet, keine rationale Zahl sein kann (Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur und Rectification des Circuls suchen, in: J.H. Lambert, Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung. Teil II.1 [Berlin 1770], 5. Abhandlung, 140–169). Daraus folgt, daß s und u inkommensurabel sind, und 1882 konnte Carl Louis Ferdinand

„Zur Streckenmessung gehörig ist nun alles, was nach dem Geraden, das nur Länge hat, gemessen wird. Man nennt es auch Anfang und Zahl.
Zur Flächenmessung aber, aus der man den Flächeninhalt erkennt, [gehört] das, was Länge und Breite hat. Man nennt es nun auch Quadrat%-zahl].
Zur Körpermessung jedoch, aus der alles Körperliche erkannt wird, [gehört] das, was Länge und Breite und Dicke hat. Es wird nun auch Würfel[-zahl] genannt."[88].

Diese etwas elliptischen Ausführungen besagen, daß man beim Messen eines linear ausgedehnten Gebildes feststellt, wie oft es von der jeweils als Maß gewählten Strecke ausgemessen wird, während man beim Messen von Flächen bzw. Körpern ganz entsprechend zu bestimmen hat, wie oft das als Maß gewählte Quadrat bzw. ein als Maß gewählter Würfel in ihnen enthalten ist. Nach Heron läßt sich die Größe einer Linie (bzw. einer Fläche oder eines Körpers) also nur dadurch bestimmen, daß man sie mit einer anderen Linie (bzw. einer anderen Fläche oder einem anderen Körper) vergleicht. Dagegen ist hier nicht davon die Rede, daß man eine Linie beim Messen mit einem Punkt (bzw. eine Fläche mit einer Linie oder einen Körper mit einer Fläche oder gar mit einer Linie) vergleichen kann, und damit dürfte hinlänglich klar sein, daß Platon in den oben angeführten Zeilen aus den *Nomoi* nicht auf die ihm erst im Alter bekannt gewordene Entdeckung der inkommensurablen Größenpaare verwiesen hat, sondern auf eine Theorie der Inhaltsbestimmung, zu deren Prinzipien das nachstehend zitierte Homogenitätskriterium aus Euklids *Elementen* gehört:
Def. V.4: Man sagt, daß Größen, die einander vervielfältigt übertreffen können, ein Verhältnis zueinander haben[89].

Die Def. V.4 besagt also, daß zwei Größen K und G proportionentheoretisch miteinander vergleichbar sind, wenn es zwei positive ganze Zahlen m und n von der Art gibt, daß die Ungleichungen $m \cdot K > G$ und $n \cdot G > K$ gelten. Da man im Bereich der Größen stets durch ein bloßes Umbenennen erzwingen kann, daß die Relation $K < G = 1 \cdot G$ erfüllt ist, läuft die Anwendung des Homogenitätskriteriums aus der Def. V.4 im wesentlichen auf die Beantwortung der Frage hinaus, zu welchen Größen K und G mit $K < G$ eine Zahl m mit der oben angeführten Eigenschaft ge-

Lindemann sogar zeigen, daß π zu den transzendenten Zahlen gehört (Über die Zahl π, in: *Mathematische Annalen* 20, 1882, 213–225).

[88] εὐθυμετρικὸν [γένος μετρήσεως] μὲν οὖν ἐστιν πᾶν τὸ κατ᾽ εὐθὺ μετρούμενον, ὃ μόνον μῆκος ἔχει, ὃ δὴ καὶ ἀρχὴ καὶ ἀριθμός καλεῖται. ἐμβαδομετρικὸν δὲ τὸ ἔχον μῆκος καὶ πλάτος, ἐξ οὗ καὶ τὸ ἐμβαδὸν γιγνώσκεται, ὃ δὴ καὶ δύναμις καλεῖται. στερεομετρικὸν δὲ τὸ ἔχον μῆκος καὶ πλάτος καὶ πάχος, ἐξ οὗ καὶ πᾶν τὸ στερεὸν γιγνώσκεται, ὃ δὴ καὶ κύβος καλεῖται, Heron, *Geometrica* (wie Anm. 80) 180.

[89] λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν (Euklid, *Elem*., Def. V. 4).

funden werden kann. Wie man sich leicht klar macht, folgt sofort weiter, daß eine Größe M kein Maß einer Größe A sein kann, wenn A und M nicht dem Homogenitätskriterium aus der Def. V.4 genügen. Da $A > M$ sein muß, gibt es nämlich keine Zahl n, für die $n \cdot M > A$ gilt. Wenn man nun annimmt, daß M trotzdem ein Maß von A ist , muß es eine Zahl k geben, für die $k \cdot M = A$ ist. Daraus folgt die Beziehung $(k+1) \cdot M > A$, und das steht im Widerspruch zu der Annahme, daß A und M nicht dem Homogenitätskriterium aus der Def. V.4 genügen.

Wie schon F. Beckmann in seiner grundlegenden Untersuchung zum V. Buch der *Elemente* betont hat[90], gibt es dort keinen Hinweis darauf, wie sich die griechischen Mathematiker eine Einsicht in die Tragweite des in der Def. V.4 angeführten Homogenitätskriteriums verschafft haben. Soweit ich sehe, gilt das für alle Schriften der griechischen Mathematiker, aber in den Werken des Aristoteles gibt es nicht nur Stellen, die belegen, daß ihm das Homogenitätskriterium aus der Def. V.4 bekannt war[91], sondern auch Passagen, die zeigen, aufgrund welcher Überlegungen man damals zu der Einsicht gekommen ist, daß Körper und Flächen sowie Flächen und Linien und schließlich Linien und Punkte kein Verhältnis zueinander haben können.

Im 2. Kapitel des I. Buches *Über das Werden und Vergehen* begründet Aristoteles mit knappen Worten, daß eine ausgedehnte Größe (μέγεθος) nicht in eine Menge von Punkten zerlegbar ist, weil sie nicht sukzessiv aus Punkten zusammengefügt werden kann[92]. Dabei ist für die hier vorgelegte Untersuchung noch besonders von Interesse, daß er in diesen Zeilen zur Bezeichnung der Punkte nicht nur das Nomen στιγμή, sondern auch die Termini ἁφή und σημεῖον benutzt, denn das ist ein Indiz dafür, daß es damals für den Punkt im allgemeinen noch keinen kanonisch festgelegten Namen gab. Ausführlicher wird der fragliche Nachweis dafür, daß sich eine Kurve (γραμμή) nicht sukzessiv aus Punkten zusammenfügen läßt, im 1. Kapitel des VI. Buches der *Physik* referiert[93], und schließlich ist er auch noch in der nachstehend zitierten Passage aus der Schrift *Über die unteilbaren Linien* überliefert, die ich hier anführe, weil in ihr außerdem von der Struktur der Zeit die Rede ist:

„Wenn sich jedes [Ding] mit jedem [anderen] wie ein Ganzes mit einem Ganzen oder wie irgendein [Teil] mit irgendeinem [Teil] oder wie ein Ganzes mit irgendei-

[90] Friedhelm Beckmann, Neue Gesichtspunkte zum 5. Buch *Euklids*, in: AHES 4, 1967–1968, 1–144, dort 32.

[91] Arist. *Anal. post.* II 17, 99a8–10; *Physica* I 4, 187b25–26. b32–34. III 6, 206b7–12 (dazu die allerdings mangelhaft überlieferten Zeilen III 7, 207b27–34). VIII 10 266b2–4: *De sensu* 6, 445b27–29.

[92] Aristoteles, *De la génération et de la corruption*. Texte établi et traduit par Charles Mugler, Paris 1966, I 2, 317a2–12; zur Deutung dieser extrem elliptisch formulierten Passage verweise ich ergänzend auf H.-J. Waschkies (wie Anm. 32) 319–352.

[93] Aristoteles *Physica* VI. 1, 231a29–231b6; dazu verweise ich wieder ergänzend auf H.-J. Waschkies (wie Anm. 32) 237–242.

nem [Teil] berührt, [und wenn] der Punkt (στιγμή) zum Teillosen gehört[94], so muß er wohl mit [jedem anderen Punkt] als Ganzes mit einem Ganzen in Kontakt treten. Was sich als Ganzes mit einem Ganzen berührt, ist aber notwendigerweise eins; denn wenn irgend etwas da ist, wo das andere, [mit dem es sich berührt], nicht ist, wird es nicht wie ein Ganzes mit einem Ganzen in Kontakt stehen.

Aber wenn teillose [Dinge] zusammen sind, nehmen sie trotz ihrer größeren Anzahl denselben Ort ein wie zuvor das eine. [Zwei Komponenten], die zusammen sind und von sich aus keine Ausdehnung haben, beanspruchen nämlich denselben Ort. Das Teillose hat [nun] aber keinerlei Ausdehnung, und daher kann eine kontinuierlich ausgedehnte Größe (μέγεθος) nicht aus unteilbaren [Komponenten] bestehen, woraus [dann weiter folgt], daß die Linie (γραμμή) nicht aus Punkten und das Zeit[-intervall] (χρόνος) nicht aus Momenten (νῦν) [zusammengesetzt ist]"[95].

Dieses Argument entspricht in der Sache durchweg den etwas knapper formulierten Ausführungen des Aristoteles, die man am Anfang des VI. Buches der *Physik* findet. Im weiteren Verlauf der *Linienschrift* folgen dann aber mehrere Varianten des eben angeführten Arguments dafür, daß sich eine Kurve nicht sukzessiv aus Punkten zusammenfügen läßt, die nicht so ohne weiteres als eine naheliegende Amplifikation der Überlegungen aus der *Physik* des Aristoteles gedeutet werden können[96]. Nun gilt die mit dem *Corpus Aristotelicum* überlieferte Schrift *Über die unteilbaren Linien* gewöhnlich als nicht authentisch, doch unter dem Gesichtspunkt der hier vorgelegten Untersuchung ist nur wichtig, daß sich ihr Autor ausgiebig auf das Wissen der Mathematiker seiner Zeit gestützt hat, auf deren Autorität er mehrfach expressis verbis hinweist; denn das spricht meiner Ansicht nach dafür, daß der oben zitierte Beweis, der sich ganz offensichtlich auf die uns in Euklids *Elementen* überlieferte Def. I.1 stützt, nach der ein Punkt das ist, was keinen Teil hat[97], ein mathematisches Lehrstück war, auf das der Autor der *Linienschrift* und Aristoteles unabhängig voneinander zurückgegriffen haben (falls diese Abhandlung nicht sogar auf Aristoteles selber zurückgeht). Das fragliche Argument zeigt insbesondere, daß ein Punkt P und eine Linie L maßtheoretisch (und proportionentheoretisch) nicht miteinander vergleichbar sind, weil es keine natürliche Zahl k gibt, für die $k.P = L$

[94] ἡ δὲ στιγμὴ ἀμερής, [Pseudo-]Aristoteles, *De lineis insecabilibus* (wie Anm. 8), 971a28.

[95] [Pseudo-]Aristoteles, *De lineis* 971a26–b4; zur Frage nach der Gestalt des Textes dieser Zeilen, für dessen Heilung W.S. Hett (wie Anm. 8) noch nicht die Handschrift *Paris. gr. 2032* zur Verfügung stand, die hier eine von allen anderen Manuskripten unabhängige Tradition repräsentiert (s. Dieter Harlfinger, Die Textgeschichte der pseudo-aristotelischen Schrift Περὶ ἀτόμων γραμμῶν. Ein kodikologisch-kulturgeschichtlicher Beitrag zur Klärung der Überlieferungsverhältnisse im Corpus Aristotelicum, Amsterdam 1971, 104–116 u. 319–338), verweise ich auf H.-J. Waschkies (wie Anm. 32) 243–244.

[96] Siehe [Pseude-]Aristoteles, *De lineis* 971b5–b26 sowie ergänzend H.-J. Waschkies (wie Anm. 32) 244–248.

[97] Dazu vergleiche man Euklids Def. I 1: σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν mit den in der Anm. 94 zitierten Worten aus der *Linienschrift*.

gilt, da der Versuch, eine Linie durch ein sukzessives Aneinanderfügen von Punkten zu erzeugen, scheitert, und eine Notiz aus dem III. Buch *Über den Himmel* läßt erkennen, wie die Mathematiker von dieser Überlegung zu einem Nachweis dafür übergegangen sind, daß sich auch keine Fläche (bzw. auch kein Körper) aus Linien (bzw. Flächen) zusammenfügen läßt.

Aristoteles erklärt dort zunächst[98], daß die Vorstellung, nach der man Körper aus Flächen zusammenfügen kann, bereits bei einer oberflächlichen Überprüfung mit den Lehren der Mathematiker kollidiert, die man unverrückt stehen lassen sollte, wenn man sie nicht mit Hilfe von verläßlicheren Argumenten als solchen, die aus deren Annahmen (ὑπόθεσις) deduziert sind, wegschaffen kann. Einen solchen Versuch hält Aristoteles im vorliegenden Fall aber für vergeblich; denn er erklärt dazu:

„Die [Vorstellung], nach der die Körper aus Flächen, die Flächen aus Linien und diese [schließlich] aus Punkten zusammengesetzt sind [läuft immer wieder] auf dasselbe Argument [hinaus]. Wenn es sich jedoch so verhalten sollte, wäre nicht mehr notwendig, daß der Teil einer Linie eine Linie ist, [und das führt auch schon die gesamte Lehre ad absurdum; denn] darüber ist in den Untersuchungen über die Bewegung (ἐν τοῖς περὶ κινήσεως λόγοις) schon früher eine Betrachtung angestellt worden [die zeigte], daß es keine unteilbaren Längen[-elemente] gibt."[99]

W.D. Ross hat gezeigt, daß Aristoteles mit dem Titel οἱ περὶ κινήσεως λόγοι stets auf seine *Physik* verweist[100], und nach Paul Moraux spielt Aristoteles in den eben angeführten Zeilen genauer auf Phys. VI.1, 231a21 sq. an[101]. Darüber hinaus zeigt der Verweis darauf, daß man die Argumente der Mathematiker, die in deren hier wie im Liniengleichnis aus der *Politeia* als ὑποθέσεις[102] bezeichneten Definitionen fundiert sind, anerkennen sollte, daß Aristoteles spezieller an das Argument aus 231a29–b6 erinnert; denn diese Zeilen enthalten eine Kurzfassung des oben zitierten Arguments aus der *Linienschrift*, in das die Definition des Punktes als Prämisse eingeht. Darüber hinaus zeigt der Hinweis auf die Definitionen an, wie sich das Argument aus den Zeilen 231a29–b6 der *Physik* (bzw. aus den Zeilen 971a26–b4 der *Linienschrift*) auf die anderen in *De caelo* III 1 genannten Fälle übertragen läßt.

Damit das klar wird, führe ich nachstehend zunächst die Definitionen des Punktes, der Linie, der Fläche und des Körpers aus Euklids *Elementen* an:

[98] Aristoteles, Du ciel. Texte établi et traduit par Paul Moraux, Paris 1965, III 1, 299a2–6.

[99] *De caelo* III 1, 299a6-11.

[100] Aristoteles, *Physics.* A Revised Text With Introduction and Commentary by W.D. Ross, Oxford 1966 [[1]1936], 1–19.

[101] Paul Moraux (wie Anm. 98)163.

[102] Dazu verweise ich vorgreifend auf meine weiter unten folgende Deutung der Terminus ὑπόθεσις im sogenannten Liniengleichnis aus Platons *Politeia*.

Def. I.1: Ein Punkt ist [das], was keinen Teil [hat],
Def. I.2: eine Linie dagegen eine breitenlose Länge.
Def. I.5: Eine Fläche aber ist, was nur Länge und Breite hat.
Def. XI.1: Ein Körper ist das, was Länge, Breite und Tiefe hat[103].

Diese sprachlich ganz offensichtlich aufeinander abgestimmten Begriffsbestimmungen wirken in den *Elementen* funktionslos, weil es dort keine Stelle gibt, an der sie angewendet werden; aber daraus darf man nicht vorschnell schließen, daß sie von vornherein nichts weiter als eine mißglückte Beschreibung des Punktes, der Linie, der Fläche und des Körpers sind, die allenfalls darauf aufmerksam machen, daß diese Gebilde zu den für die Geometrie grundlegenden Objekten gehören. Nach der Wissenschaftstheorie aus der *Zweiten Analytik* des Aristoteles gehören die Definitionen nämlich zu den fachspezifischen Prinzipien und damit zu denjenigen Sätzen, die als unbewiesene Prämissen in die Beweise der betreffenden Wissenschaft eingehen[104]. Zu diesen Prinzipien gehören in der Geometrie nun aber insbesondere die Definition des Punktes und der Linie[105], und wenn man weiter bedenkt, daß Aristoteles die Definitionen I.2 und XI.1 in der *Topik* bzw. der *Physik* fast wörtlich zitiert[106], darf es als sicher gelten, daß die gesamte oben angeführte Definitionenfolge zu seiner Zeit in den Lehrbüchern der Mathematiker zu finden war. Das ist ein weiteres Indiz dafür, daß der Def. I.1, in der die eben angeführte Begründung aus der *Linienschrift* (und dem VI. Buch der *Physik*) dafür, daß sich eine Linie nicht sukzessiv aus Punkten zusammenfügen läßt (eben noch erkennbar) fundiert ist[107], ursprünglich sehr wohl eine beweistechnische Funktion zugedacht war. Wie ich bereits andeutete, läßt sich den weiter oben zitierten Zeilen aus dem III. Buch *Über den Himmel* darüber hinaus entnehmen, daß man von dem fraglichen Beweis zu einer ähnlichen Begründung dafür übergegangen ist, daß sich auch keine Flächen (bzw. Körper) aus Linien (bzw. Flächen) zusammenfügen lassen, und das soll nun noch etwas genauer erläutert werden.

Dazu schicke ich zunächst einige Erläuterungen zu den mathematischen Termini μῆκος, πλάτος und βάθος voran. Da sie üblicherweise mit den Worten Länge,

[103] Def. I.1: σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν,
Def. I.2: γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.
Def. I.5: ἐπιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.
Def. XI.1: στερεόν ἐστι τὸ μῆκος καὶ πλάτος καὶ βάθος ἔχον.

[104] *Anal. post.* I 2, 72a14–24, und I 10, 76a31–b16; dazu verweise ich ergänzend auf H.-J. Waschkies (wie Anm. 1) 111–130.

[105] Anal. post. I 10, 76b3–6.

[106] Dazu vergleiche man die Zeilen οἱ τὴν γραμμὴν ὁριζόμενοι μῆκος ἀπλατὲς εἶναι οὐδέν ... ἄλλο [λέγουσιν] ἢ ὅτι οὐκ ἔχει πλάτος (*Topica* VI 6, 143b11–13) und διαστήματα μὲν οὖν ἔχει [ὁ τόπος] τρία, μῆκος καὶ πλάτος καὶ βάθος, οἷς ὁρίζεται σῶμα πᾶν (*Physica* IV 1, 209a4–6) mit den in der Anm. 103 angeführten Definitionen I.2 und XI.1 aus den *Elementen*.

[107] SieheAnm. 94 und 97; dazu verweise ich ergänzend auf den Satz ἐπεὶ δ' ἀμερὲς τὸ ἀδιαίρετον, ἀνάγκη ὅλον ὅλου ἅπτεσθαι, *Physica* VI 1, 231b3.

Breite und Tiefe übersetzt werden, läßt das heute an die Namen für die drei Achsen aus dem jedem Leser dieser Zeilen vertrauten cartesischen Bezugssystem (oder an drei paarweis rechtwinklig aufeinander stehende Kanten eines Quaders) und damit an drei voneinander unabhängige, linear erstreckte Richtungsparameter denken, doch wie die nachstehenden angeführten Zeilen aus dem V. Buch der *Metaphysik* zeigen, wäre eine solche Deutung verfehlt. Aristoteles erklärt dort nämlich:
„Ein Quantum nun ist eine Menge, wenn es abzählbar ist, eine Größe ist es jedoch, wenn es meßbar ist. … Von diesen [Quanta] ist die begrenzte Menge eine Zahl, die [begrenzte] Länge aber eine Linie, die [begrenzte] Breite dagegen eine Fläche, die [begrenzte] Tiefe schließlich ein Körper."[108]

Die Termini ‚Breite' und ‚Tiefe' bezeichnen in diesen Zeilen offensichtlich keine linear erstreckte Größe. Mit ‚Tiefe' ist hier vielmehr eine nach überall hin erstreckte Ausdehnung gemeint, deren Portionierung durch ein Abgrenzen mit Flächen Körper ergibt, und die sich mithin grundlegend von der bloßen Breite oder Länge unterscheidet. Das Wort ‚Breite' bezeichnet in diesem Kontext ebenfalls keinen gerichteten Parameter, sondern etwas flächenhaft Ausgedehntes, das nicht mit der bloßen Länge verwechselt werden darf, und wie ich gleich erläutern werde, haben die Termini ‚Breite' und ‚Tiefe' in den oben angeführten Definitionen I.2, I.5 und IX.1 dieselbe Bedeutung.
Damit das klar wird, zitiere ich zunächst noch eine kurze Passage aus dem Kontext der weiter oben angeführten Zeilen aus *De caelo*, in der Aristoteles zu bedenken gibt:
„Ferner wäre es ungereimt, wenn man die Flächen nur längs einer Geraden zusammenfügen könnte; denn wie man eine Linie auf zweierlei Art zu einer Linie hinzufügt, und zwar der Länge und der Breite nach, muß eine Fläche [auf zweierlei Art] einer Fläche [angefügt werden können]."[109]

Dem Sachverhalt, nach dem man Linien ‚der Länge nach' zusammenfügen kann, liegt die Operation des Messens zugrunde, bei dem in praxi oder in abstracto eine (als Maß fungierende) Linie immer wieder an das ‚neue' Ende einer durch die vorangehenden Schritte des Ausmessens erzeugten Linie angefügt wird, bis eine ‚daneben' vorgelegte Linie ohne Rest ausgemessen ist (oder erstmals übertroffen wird). Dagegen ist der Hinweis darauf, daß man eine Linie auch ‚der Breite nach' zu einer anderen hinzufügen kann, nicht mehr so ohne weiteres verständlich; aber einige Zeilen aus *De lineis insecabilibus* zeigen, wie das gemeint ist und welche Konsequenzen das für die Antwort auf die Frage hat, ob man eine Fläche aus Linien zusammensetzen kann. Dort heißt es nämlich:

[108] πλῆθος μὲν οὖν ποσόν τι ἐὰν ἀριθμητὸν ᾖ, μέγεθος δὲ ἂν μετρητὸν ᾖ. … τούτων δὲ πλῆθος μὲν τὸ πεπερασμένον ἀριθμὸς μῆκος δὲ γραμμὴ πλάτος δὲ ἐπιφάνεια βάθος δὲ σῶμα, *Metaph.* V 13, 1020a8–14.

[109] ἔτι εἰ μὲν τὰ ἐπίπεδα μόνον κατὰ γραμμὴν ἐνδέχεται συντίθεσθαι, ἄτοπον· ὥσπερ γὰρ γραμμὴ πρὸς γραμμὴν ἀμφοτέρως συντίθεται, καὶ κατὰ μῆκος καὶ κατὰ πλάτος, δεῖ καὶ ἐπίπεδον ἐπιπέδῳ τὸν αὐτὸν τρόπον, *De caelo* III 1, 299b23–27.

„Wenn eine Linie auf eine andre Linie gelegt wird und [darauf] paßt (ἐφαρμόζειν), kommt keine Breite hinzu.“[110]

Dieses Zusammenfügen der Linien sollte offensichtlich zu einem ‚Aufeinanderpassen‘ führen, das dem totalen Kontakt zwischen zwei Punkten aus Phys. VI.1 entspricht, und mithin impliziert der Wortlaut der Def. I.2 ganz ähnlich wie der Text der Def. I.1 im Fall der Punkte und der Linie, daß sich eine Fläche niemals sukzessiv aus eindimensionalen Komponenten zusammenfügen läßt. Das Zusammenfügen ‚der Breite nach‘ führt hier also zu einem ‚Mißerfolg‘, doch daraus darf man nicht den Schluß ziehen, daß die griechischen Geometer die fragliche Operation (ebenso wie das Zusammenfügen von Punkten und das Zusammenfügen von Flächen ‚der Fläche nach‘) nur provisorisch eingeführt haben, um sie danach sogleich als mathematisch unfruchtbar verwerfen zu können. Zu den Prinzipien, die Euklid seinen *Elementen* vorangestellt hat, gehört Axiom I.7: „Das aufeinander Passende (τὰ ἐφαρμόζοντα) ist einander gleich.“[111]

Die Anwendung dieses Gleichheitskriteriums erfordert (ebenso wie dessen Umkehrung, die als Prämisse in die Beweise der Sätze I.4, I.8 und III.24 aus den *Elementen* eingeht), daß man die fragliche Operation des Aufeinanderpassens ausführt, und wie Textstellen aus den Schriften von Autolykos aus Pitane, Archimedes, Heron aus Alexandria und Pappos aus Alexandria[112] zeigen, ist sie von den griechischen Mathematikern nie als unbrauchbar oder gar unzulässig verworfen worden. Da der Autor der *Linienschrift* in den oben zitierten Zeilen außerdem den mathematischen Terminus ἐφαρμόζειν benutzt, kann es kaum einen Zweifel daran geben, daß er uns dort (ebenso wie in den weiter oben zitierten Zeilen 971a26–b4) ein Argument der alten Geometer überliefert hat, und zugleich dürfte damit klar sein, welche Funktion dem ‚nur‘ aus der Def. I.5 zugedacht war, nach der die „Fläche das ist, was nur Länge und Breite hat“. Da sich die Körper nach der Def. XI.1 dadurch auszeichnen, daß sie sowohl Länge als auch Breite und Tiefe haben, besagt die Def. I.5 nämlich vor allem, daß den Flächen die spezifisch räumliche Ausdehnung fehlt[113], und mithin führt das Aneinanderpassen von zwei Flächen niemals zu einem Dickenzuwachs oder zu einer räumlich ausgedehnten Größe.

Ich will an dieser Stelle kurz auf die Frage zurückkommen, ob man Größenpaare, die aus einer Fläche und einer Linie bzw. einem Körper und einer Fläche oder einem Körper und einer Linie bestehen, in der Antike als inkommensurabel be-

[110] ὅταν γὰρ ἐπὶ γραμμὴν γραμμὴ τέθῃ καὶ ἐφαρμόσῃ, οὐδὲν γίνεται μεῖζον τὸ πλάτος, (*De lineis*, 971a22–24).

[111] τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ᾽ ἄλληλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν, Euklid, *Elem.*, Axiom. I. 7.

[112] Dazu verweise ich auf die umfangreiche Liste mit dafür einschlägigen Belegstellen bei Charles Mugler (wie Anm. 82) 208 f., zu der ich noch ergänzend Aristoteles, Phys. V 4, 228b19–25; Themistios aus Paphlagonien, *In Aristotelis physica paraphrasis.* Ed. H. Schenkl [CAG V, Teil 2] 4.2–8 (Antiphon B 13); Simplikios aus Kilikien, *In Aristotelis physicorum libros commentaria.* Ed. H . Diels [CAG IX], 55.4–8 (Antiphon B 13) anführe.

[113] Diese Deutung der Def. I.5 findet man schon bei Proklos, *In primum Euclidis elementorum librum commentarii.* Ex rec. Godofredi Friedlein, Leipzig 1873 (ND Hildesheim 1967), 114.1–14, der in diesem Zusammenhang sogar den Terminus ἀβαθής einführt.

zeichnet hat. Wie die voranstehenden Ausführungen zeigen, kann das Kommensurabilitätskriterium aus der Def. X.1 bei solchen Größenpaaren nie erfüllt sein, und daher kann nicht von vornherein ausgeschlossen werden, daß man sie als inkommensurabel bezeichnet hat. In den Schriften der griechischen Mathematiker gibt es dafür jedoch kein Beispiel, und die Autoren der Scholien zum X. Buch von Euklids *Elementen* erklären außerdem fast durchgängig, daß Größenpaare nur dann als kommensurabel oder inkommensurabel gelten, wenn sie außerdem (im Sinne des Kriteriums aus der Def. V.4) homogen sind. Davon weicht nur der Autor des Scholions X.14 ab, in dem ich mit Bernard Vitrac einen spätantiken Gelehrten sehe[114], der die Zeilen 817E–820C aus den *Nomoi* ebenso (miß-)verstanden hat wie die neueren Interpreten dieser Textstellen, die in ihnen einen Hinweis darauf sehen, daß Platon erst spät vom Phänomen der Inkommensurabilität gehört hat.

Ich habe in einem anderen Zusammenhang Indizien dafür zusammengestellt, daß die Definitionen I.1, I.2, I.5 und XI.1 samt der in ihnen fundierten Begründung dafür, daß man Körper ebensowenig aus Flächen wie Flächen aus Linien und Linien aus Punkten zusammenfügen kann, auf Eudoxos aus Knidos zurückgehen[115]. Dabei muß die Zuschreibung an Eudoxos weiter als ein wenig hypothetisch gelten, aber in einer anderen Hinsicht konnte ich die Ergebnisse meiner älteren Untersuchungen zu diesem Themenkreis inzwischen erheblich präzisieren.

Charles Mugler war wohl der erste Wissenschaftshistoriker, dem auffiel, daß die mathematischen Termini στιγμή und σημεῖον, mit denen die griechischen Mathematiker den ‚Punkt im allgemeinen' bezeichnet haben, in keiner voraristotelischen Quelle nachweisbar sind[116]. Er glaubte allerdings aus den Referaten des Aristoteles über die Lehren der Vorsokratiker erschließen zu können, daß der Terminus στιγμή bei diesen seit der 2. Hälfte des 5. Jahrhunderts v.Chr. zur Bezeichnung der Punkte diente, während vor kurzem Michel Federspiel die Ansicht vertreten hat, daß σημεῖον der Ausdruck gewesen sein soll, den die griechischen Geometer seit der 2. Hälfte des 5. Jahrhunderts v.Chr. zur Bezeichnung von Punkten benutzten, weil die Worte σῆμα und σημεῖον seit Homer in vielerlei Kontexten auf ein ‚markantes Zeichen' verweisen[117]. Damit wandte sich Federspiel gegen Vincenzo Vita[118], der im Fehlen von Belegen für die Termini στιγμή und σημεῖον in den Texten der voraristotelischen Autoren ein starkes Indiz dafür gesehen hatte, daß sie erst zur Zeit von Aristoteles zur Bezeichnung der Punkte in Gebrauch kamen, für die

114 B. Vitrac (wie Anm. 77), III 25.

115 H.-J. Waschkies (wie Anm. 32) 300–307.

116 Charles Mugler, Platon et la recherche mathématique de son époque, Straßburg 1948 (ND Naarden 1969), 19–20.

117 M. Federspiel (wie Anm. 3) 401.

118 Vincenzo Vita hat seine Überlegungen zur Genese des Punktbegriffs in dem Aufsatz „Il punto nella terminologia matematica greca" zusammengefaßt (in: AHES 27, 1982, 101–114), der auf die Ergebnisse aus seinen Arbeiten „Il punto nella terminologia di Aristotele" (in: Cultura e Scuola 72, 1979, 218–224) und „Sulle definizioni pre – Euclidee di punto" (in: Cultura e Scuola 76, 1980, 242–247) zurückgreift.

daneben weiter die in den voraristotelischen Texten tatsächlich überlieferten Eigennamen wie ‚Grenze' (πέρας), ‚äußerstes Ende' (ἔσχατον), ‚Mitte' (μέσον) und ‚Zentrum' (κέντρον) üblich blieben. Dabei nahm er (mutatis mutandis mit dem gleichen Argument wie Mugler) an, daß der Terminus στιγμή auf die Philosophen zurückgeht, während das Wort σημεῖον nach Vita zunächst von Eudoxos aus Knidos in die Astronomie eingeführt worden ist und von da aus schließlich in die (uns überlieferten) Werke der griechischen Mathematiker einging, die im Gefolge des Eudoxos zur Bezeichnung der Punkte im allgemeinen ausnahmslos das Wort σημεῖον (und nie das Wort στιγμή) benutzten. Dazu sei zunächst angemerkt[119], daß der Terminus στιγμή anfangs nur in Texten, die zum *Corpus Aristotelicum* gehören, zur Bezeichnung des geometrischen ‚Punktes im allgemeinen' benutzt wird. Auch bei den späteren Autoren tritt er (fast) nur in Kommentaren zu solchen Stellen auf, und wenn man diese Belege zusammenfassend überprüft, ergibt sich, daß der Fachausdruck στιγμή nicht aus einer philosophischen Tradition stammt, sondern zur Zeit des Aristoteles von den Geometern als ein Sammelname für alle markanten Punkte eingeführt worden ist, die Grenzen von Linien sind. Dagegen wurde er von den Vertretern dieser Tradition anscheinend noch nicht zur Bezeichnung von Punkten benutzt, die auf der Peripherie von Kreisen bzw. isoliert inner- oder außerhalb einer solchen Figur liegen, und daher war der zugehörige Punktbegriff zwar schon ‚ziemlich', aber noch nicht völllig allgemein. Darüber hinaus konnte ich die These von V. Vita durch weitere Indizien erhärten, daß der Terminus σημεῖον erst zur Zeit von Eudoxos (und Aristoteles) als Bezeichnung für den ‚Punkt im allgemeinen' im Rahmen einer Fortentwicklung der griechischen Astronomie eingeführt worden ist, in der es nunmehr auch um Punkte ging, die auf der Peripherie von Kreisen liegen und dort die Position eines Sterns beschreiben. Dabei benutzte ich unter anderem ein Kriterium, das Erwin Neuenschwander zur Ermittlung von Sätzen aus den *Elementen* angewendet hat, die voreuklidisch sind. Im Rahmen einer Analyse der Bücher II und XIII aus diesem Sammelwerk war Neuenschwander nämlich aufgefallen[120], daß die Terminologie der Protasis dort mitunter von der in den dazugehörigen Beweisen verschieden ist. Neuenschwander schloß daraus, daß Euklid den fraglichen Satz selbst unverändert aus dem Werk eines seiner Vorgänger übernommen hat, während er den Beweis überarbeitete, wobei dann Euklids eigene Termini in die neue Begründung Eingang fanden.

[119] Zum Folgenden verweise ich auf H.-J. Waschkies, Indizen zur Datierung der geometrischen Termini στιγμή und σημεῖον als Bezeichnungen für den ‚Punkt im allgemeinen' auf die Zeit von Eudoxos und Aristoteles, in: Althoff, Jochen – Bernhard Herzhoff und Georg Wöhrle (Hrsgg.): Antike Naturwissenschaft und ihre Rezeption, 10, 2000, 43–81.

[120] Erwin Neuenschwander, Die ersten vier Bücher der Elemente Euklids. Untersuchungen über den mathematischen Aufbau, die Zitierweise und die Entstehungsgeschichte, in: AHES 9, 1972–1973, 325–380, dort 371 f., und ders., Die stereometrischen Bücher der Elemente Euklids. Untersuchunen über den mathematischen Aufbau und die Entstehungsgeschichte, in: AHES 14, 1974–1975, 91–125, dort 101–102.

Im zweiten Teil der Untersuchung werde ich zuerst mit Hilfe dieses von Neuenschwander eingeführten Kriteriums nachweisen, daß wesentliche Teile der Lehre von den inkommensurablen Größen aus dem X. Buch der *Elemente* vorlagen, bevor die Griechen über den Begriff des ‚Punktes im allgemeinen' verfügten. Andererseits zeigt das Prooemium aus dem *Theaetet*, daß diese Theorie schon weit entwickelt gewesen sein muß, als dieser Dialog entstand, und damit darf die Datierung des allgemeinen Punktbegriffs auf die Zeit des älteren Platon als gesichert gelten. Danach werde ich eine Reihe von Belegen dafür zusammenstellen, daß Platon damals bereits die Grundzüge eines Programms zur Ableitung der mathematischen Prinzipien aus den Prinzipien seiner eigenen Philosophie entworfen hatte. In das zugehörige Schema ließ sich der neue Punktbegriff aber nicht integrieren, und wenn man weiter bedenkt, daß die Griechen ihre Mathematik bis dahin auch ohne jeden Rückgriff auf den Begriff des ‚Punktes im allgemeinen' stetig und erfolgreich weiterentwickelt hatten, wird verständlich, warum Platon dazu neigte, in ihm einen überflüssigen und unnötigen Zusatz zur Geometrie von damals zu sehen.

Kiel Hans-Joachim Waschkies